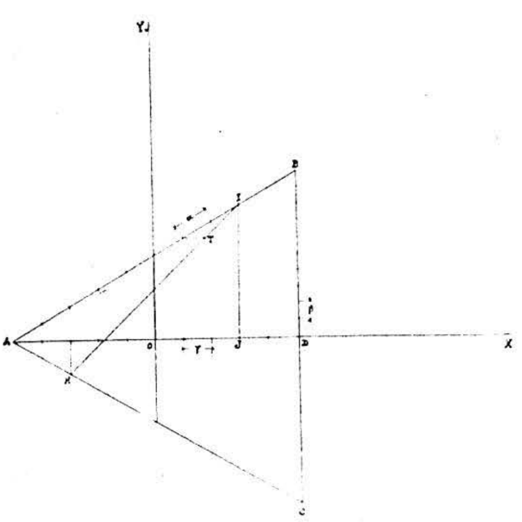
DE LA PARÁBOLA

Solo en los últimos dias ha llamado mi atencion el artículo publicado en los *Anales* del mes de Mayo por don Augusto Tafelmacher, i cuyo título sirve de epígrafe a estas líneas.

Encierra dicho artículo tres demostraciones del siguiente teorema:

Si se dividen los lados $A\ B$ i $A\ C$ de un triángulo isósceles a partir del vértice A en $2\ n$ partes iguales i se unen el primer punto de division de cada uno de los lados con el penúltimo del otro lado, el segundo punto con el antepenúltimo, etc., las rectas de union $H\ I$ son tanjentes a una parábola inscrita en el triángulo i que pasa por los vértices B i C.



Ya que se ha tratado de esta cuestion, que todo alumno de Resistencia de Materiales aplica con tanta frecuencia, no creo fuera de lugar dar a continuacion una demostracion del teorema enunciado, talvez mas sencilla que las a que me he referido i que sigue la marcha jeneral acostumbrada en Jeometría Analítica para tratar este jénero de problemas.

Sea $A\ D$ la bisectriz del ángulo en A i O su punto medio; si trazamos $O\ Y$ perpendicular sobre $O\ X$, dicha recta cortará a los lados $A\ B$ i $A\ C$ en sus puntos medios; ella será, pues, segun el enunciado del teorema, tanjente en el vértice a la parábola cuyo eje es $A\ D$.

Tomemos $O\ X$ i $O\ Y$ como un sistema de ejes coordenados rectangulares i escribamos la ecuacion de la parábola referida a esos ejes:

$$y^2 = 2\ p\ x$$

Como el punto B pertenece a la parábola, sus coordenadas deben satisfacer a la ecuacion de esta curva, la que nos da:

$$\overline{BD}^2 = 2\ p\ \overline{OD}$$

i haciendo:

$$B\ D = b$$

$$O\ D = h$$

tendremos:

$$b^2 = 2\ p\ h$$

$$2p = \frac{b^2}{h}.$$

Reemplazando este valor en la ecuacion de la parábola, quedará ésta bajo la forma.

$$y^2 = \frac{b^2}{h} x \qquad (1)$$

Para demostrar el teorema nos bastará hacer ver que una cualquiera de las rectas H I es tanjente a dicha curva.

Escribamos la ecuacion de esta recta, para lo cual debemos primero fijar la coordenada de sus puntos H e I.

Si trazamos paralelas a O X por los puntos de division de A B, la recta B D quedará dividida en $2\ n$ partes iguales β; del mismo modo, si bajamos por dichos puntos perpendiculares a A D, esta recta quedará dividida en $2\ n$ partes iguales γ; por fin, es fácil ver que

$$\beta = \frac{b}{2n}$$

$$\gamma = \frac{h}{n}$$

Admitiendo ahora que el punto I dista de B, $\delta\alpha$ por ejemplo, las coordenadas $O\ J = X'$ i $J\ I = Y'$ de dicho punto valdrán:

$$X' = (n - \delta)\ \gamma = (n - \delta) \frac{h}{n}$$

$$Y' = (2\ n - \delta)\ \beta = (2\ n - \delta) \frac{b}{2\ n}$$

Del mismo modo las coordenadas X″ e Y″ del punto H, que dista tambien δ a de A. valdrán:

$$X'' = -(n-\delta)\frac{h}{n}$$

$$Y'' = -\frac{\delta b}{2n}$$

La ecuacion de la recta H I será, pues:

$$Y - Y' = \frac{Y''-Y'}{X''-X'}(X - X')$$

o sea:

$$Y - (2n-\delta)\frac{b}{2n} = \frac{-\frac{\delta b}{2n} - (2n-\delta)\frac{b}{2n}}{-(n-\delta)\frac{h}{n} - (n-\delta)\frac{h}{n}}\left(X - (n-\delta)\frac{h}{n}\right)$$

$$Y = \frac{b\,n}{2\,(n-\delta)\,h}\,X + \frac{b}{2}\left(1 - \frac{\delta}{n}\right) \qquad (2)$$

Para ver si la recta H I es tanjente a la parábola no habrá mas que hacer coexistir las ecuaciones (1) i (2):

$$Y_1^2 = \frac{b^2}{h}X_1$$

$$Y_1 = \frac{b\,n}{2\,(n-\delta)\,h}X_1 + \frac{b}{2}\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)$$

llamando X_1 i Y_1 las coordenadas del punto de tanjencia.

La resolucion del sistema de ecuaciones considerado nos da como únicos valores de las incógnitas:

$$Y_1 = b\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)$$

$$X_1 = h\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^2$$

Luego, si solo se satisface dicho sistema para un par de valores de las variables, es evidente que la recta HI i la parábola son tanjentes entre sí.

Como la recta HI es una cualquiera de las rectas construidas de la manera indicada en el enunciado del teorema, queda demostrado que todas esas rectas son tanjentes a la parábola

$$y^2 = \frac{b^2}{h}x$$

Para terminar, podemos hacer una última observacion.

Cuando en la espresion de Y_1, δ pasa del valor 2 n al valor o, Y_1 varia en la forma siguiente:

$$\delta=2\,n \qquad Y_1=-b=-2\,n\,\beta$$

$$\delta=2\,n-1 \quad Y^1=-b+\frac{b}{n}=-(2\,n-2)\,\beta$$

$$\delta=2\,n-2 \quad Y_1=-b+\frac{2\,b}{n}=-(2\,n-4\beta)$$

....

....

$$\delta=2\,n-(n-1) \quad Y_1=-b+(n-1)\frac{b}{n}=-2\,\beta$$

$$\delta=n \qquad Y_1=o$$

$$\delta=n-1 \quad Y_1=\frac{b}{n}=2\,\beta$$

$$\delta=n-2 \quad Y_1=2\frac{b}{n}=4\beta$$

....

....

$$\delta=o-2 \quad Y_1=b=2\,n\,\beta$$

Los valores de Y_1 nos hacen ver que los puntos de tanjencia de la parábola con las rectas HI se encuentran en las intersecciones de estas rectas con las paralelas al eje OX trazadas a partir del vértice A del trángulo ABC por cada dos de los puntos de division de los lados AB i AC de dicho triángulo.

Santiago, 29 de Setiembre de 1903.

RAÚL CLARO SOLAR.