

Cálculo de sistemas hiperestáticos con el teorema de los trabajos virtuales

Traducción de Yago Rovano A.

(Conclusión)

B).—SOLIDOS SOMETIDOS A TRACCION O COMPRESION, FLEXION Y ESFUERZOS DE CORTE. SISTEMAS COMBINADOS

§ 1. VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. DETERMINACIÓN DE LAS SOLICITACIONES INCÓGNITAS

27. Imaginemos un sólido elástico isótropo de forma de viga prismática, solicitado por fuerzas externas situadas en un mismo plano que pasa por el eje geométrico. En una sección transversal cualquiera, para la cual la sollicitación exterior resulte de un esfuerzo normal baricéntrico N , de un momento de flexión M y de un esfuerzo de corte T , el elemento dF a la distancia y del eje de flexión (eje baricéntrico paralelo al eje neutro) soporta una tensión normal unitaria σ y una tensión tangencial unitaria τ , las cuales, si no se sobrepasa el límite de elasticidad, quedan expresadas como es sabido, por

$$(28) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y}{J}, \quad \tau = \frac{T M_r}{J z_r}$$

Como ya lo observamos, estas expresiones se aceptan en la práctica también cuando el eje geométrico del sólido es ligeramente curvilíneo, o sea tal que el radio de curvatura en cada uno de sus puntos sea muy grande respecto a la dimensión transversal radial del sólido.

A consecuencia de una deformación virtual cualquiera, siempre que sea pequeñísima y compatible con las ligazones del sistema, el elemento ds de fibra que tiene dF como sección transversal, sufre una dilatación longitudinal y una contracción transversal expresadas por ϵds y γds , respectivamente, si ϵ representa la dilatación unitaria y γ la contracción unitaria; de manera que el trabajo virtual de las tensiones internas correspondientes a tales deformaciones, y despreciando las deformaciones de la sección transversal, quedará expresado por

$$\int (\sigma dF \cdot \epsilon ds) + \int (\tau dF \cdot \gamma ds)$$

o también por

$$\int \sigma \epsilon dv + \int \tau \gamma dv$$

siendo $dF \cdot ds = dv$ = volumen del elemento de fibra.

Indicando ahora con P una cualquiera de las cargas solicitantes del sólido, con C una reacción de apoyo cualquiera, con δ el desplazamiento del punto de aplicación de P en dirección de P , con Δc el del punto de aplicación de C en dirección de C , desplazamientos que corresponden a los interiores ϵds , γds y suponiendo el equilibrio entre las fuerzas interiores y las exteriores, el teorema de los trabajos virtuales nos da

$$(29) \quad \Sigma P \delta + \Sigma C \Delta c = \int \sigma \epsilon dv + \int \tau \gamma dv$$

siempre que el peso propio del sólido se considere entre las cargas.

28. Como lo hemos dicho, ésta ecuación vale no sólo cuando se introducen para δ , Δc , ϵ , γ los desplazamientos correspondientes a la condición de carga efectiva, sino también cuando esos símbolos representan desplazamientos *cualquiera*, siempre que sean posibles y pequeñísimos, y por consiguiente la ecuación subsiste todavía si las fuerzas se reemplazan por los valores correspondientes a una condición dada de carga que indicaremos con el índice a y a los desplazamientos se atribuyen los valores correspondientes a otra condición de carga que indicaremos con el índice b ; y entonces reemplazando en la (29) ϵ y γ por sus expresiones

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t \qquad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

aquella puede escribirse

$$(30) \quad \Sigma P_a \delta_b + \Sigma C_a \Delta c_b = \int \frac{\sigma_a \sigma_a}{E} dv + \int \frac{\tau_a \tau_b}{G} dv + \int \alpha t \sigma_a dv$$

Reemplacemos ahora σ y τ por las expresiones dadas por (28) y observemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma_a \sigma_b}{E} dv &= \int \frac{N_a N_b ds dF}{E F^2} + \int \frac{M_a M_b ds y^2 dF}{E J^2} + \\ &+ \int \frac{(N_a M_b + N_b M_a) ds y dF}{E F J} = \int \frac{N_a N_b ds}{E F} + \int \frac{M_a M_b ds}{E J} ; \\ \int \frac{\tau_a \tau_b}{G} dv &= \int \frac{T_a T_b}{G} \left(\frac{M_r}{J z_r} \right)^2 ds dF = \\ &= \int \frac{T_a T_b}{F G} \cdot \frac{\int \left(\frac{M_r}{z_r} \right)^2 dF}{F \rho^4} ds = \int x \frac{T_a T_b}{F G} ds \end{aligned}$$

y que

$$\int \alpha t \sigma_a dv = \iint \left(\frac{N_a}{F} + \frac{M_a y}{J} \right) \alpha t ds dF$$

en la que t representa el número de grados en que varía la temperatura en el elemento dF . Suponiendo ahora que t sea constante para todos los puntos de una misma cuerda paralela al eje neutro, y que varíe linealmente con y , de tal manera que indicando con h la altura de la sección, con t_0 el valor de t para la cuerda baricéntrica y con

$\Delta t = t_e - t_i$ la diferencia de los valores de t se puede escribir $t = t_0 + \Delta t \frac{y}{h}$, se tiene

$$\iint \left(\frac{N_a}{F} + \frac{M_a y}{J} \right) \alpha \left(t_0 + \Delta t \frac{y}{h} \right) ds dF = \int \alpha t_0 N_a ds + \int \alpha \Delta t \frac{M_a}{h} ds$$

Después de lo cual la (30) podrá escribirse

$$(31) \quad \begin{cases} \sum P_a \delta_b + \sum C_a \Delta c_b = \int \frac{N_a N_b ds}{E F} + \int \frac{M_a M_b ds}{E J} + \\ + \int x \frac{T_a T_b}{G F} ds + \int \alpha t_0 N_a ds + \int \alpha \Delta t \frac{M_a}{h} ds \end{cases}$$

Se llega más directamente a la misma ecuación expresando el segundo miembro en función del trabajo virtual efectuado por las sollicitaciones correspondientes a la sección corriente del sólido. Y en efecto, podemos escribir

$$(32) \quad \sum P_a \delta_b + \sum C_a \Delta c_b = \int N_a \cdot \Delta ds_b + \int M_a \cdot \Delta d\varphi_b + \int T_a \cdot \xi ds_b$$

en la cual los desplazamientos, que podemos imaginar debidos a otra condición de carga de índice b y a una variación de temperatura, tiene por expresión

$$\Delta d_{sb} = \frac{N_b}{E F} ds + \alpha t_0 ds$$

$$\Delta d_{sb} = \frac{M_b}{E J} ds + \frac{\alpha \Delta t ds}{h}$$

$$\xi d_{sb} = \kappa \frac{T_b}{G F} ds$$

y por consiguiente la (32) coincide con la (31).

La mayoría de las veces en las aplicaciones se considera t constante para todos los puntos de la sección; se anula entonces la última integral de la (31), y en la penúltima se reemplazará t_0 por t . En las fórmulas que siguen haremos esta hipótesis simplificada.

29. Las solicitaciones N , M , T y las reacciones C de apoyo correspondientes a la condición de carga efectiva son funciones lineales de las fuerzas externas; por consiguiente, si el sólido es estáticamente indeterminado por la presencia de las solicitaciones X' , X'' , X''' , ..., estáticamente indeterminadas, podrá escribirse siempre:

$$(33) \quad \begin{aligned} C &= C_0 + C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \dots \\ N &= N_0 + N' X' + N'' X'' + N''' X''' + \dots \\ M &= M_0 + M' X' + M'' X'' + M''' X''' + \dots \\ T &= T_0 + T' X' + T'' X'' + T''' X''' + \dots \end{aligned}$$

en las cuales

C_0 , N_0 , M_0 , T_0 son funciones lineales de las cargas P y representan las reacciones de apoyo, los esfuerzos normales, los momentos de flexión y los esfuerzos de corte para la viga *estáticamente determinada* en que se transforman el sólido dado, cuando se suprimen todas las cantidades X ;

$$C', C'', C''', \dots; N', N'', N''', \dots; M', M'', M''', \dots; T', T'', T''', \dots$$

representan ciertos coeficientes independientes de las cargas P y de las cantidades X y precisamente C' , N' , M' , T' son las reacciones de apoyo, los esfuerzos normales, los momentos de flexión, los esfuerzos de corte producidos por la solicitación $X' = 1$, suponiendo al mismo tiempo eliminadas todas las cargas y las otras X ; C'' , N'' , M'' , T'' , representan las mismas cantidades para la solicitación $X'' = 1$, etc.

Escribamos ahora la ecuación de los trabajos virtuales correspondiente a la solicitación $X' = 1$ y a los desplazamientos reales, o sea los producidos por la condición de carga efectiva; bastará hacer en la (31)

$$P_a = 0, C_a = C', N_a = N', M_a = M', T_a = T'$$

$$\Delta c_b = \Delta c, N_b = N, M_b = M, T_b = T$$

y entonces observando que el trabajo $\sum C \Delta c$ producido por las reacciones de apoyo puede ponerse también bajo la forma

$$\Sigma C \Delta c = \Sigma C_0 \Delta c + X' \Sigma C' \Delta c + X'' \Sigma C'' \Delta c + \dots$$

o también

$$L = L_0 + L' X' + L'' X'' + \dots$$

aquella ecuación nos da

$$(34) \quad \begin{cases} L' = \int \frac{N N'}{E F} ds + \int \frac{M M'}{E J} ds + \int x \frac{T' T}{G F} ds + \int \alpha t N' ds \\ \text{análogamente para la sollicitación } X'' = 1 \text{ se tiene} \\ L'' = \int \frac{N N''}{E F} ds + \int \frac{M M''}{E J} ds + \int x \frac{T T''}{G F} ds + \int \alpha t N'' ds \end{cases}$$

en las cuales L' , L'' , ... representan los trabajos virtuales producidos por las reacciones de apoyo correspondientes a las sollicitaciones $X' = 1$, $X'' = 1$, ... Estas ecuaciones que contienen implícitamente en N , M y T las incógnitas X en primer grado, y cuyo número es exactamente igual al de las X , sirven para determinar estas cantidades estáticamente indeterminadas.

Observando que

$$\begin{aligned} N' &= \frac{\partial N}{\partial X'}, & N'' &= \frac{\partial N}{\partial X''}, \dots \\ M' &= \frac{\partial M}{\partial X'}, & M'' &= \frac{\partial M}{\partial X''}, \dots \\ T' &= \frac{\partial T}{\partial X}, & T'' &= \frac{\partial T}{\partial X''}, \dots \\ L' &= \frac{\partial L}{\partial X'}, & L'' &= \frac{\partial L}{\partial X''}, \dots \end{aligned}$$

las ecuaciones de condición que determinan las incógnitas X pueden agruparse también en la ecuación

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = \int \frac{N}{E F} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \frac{M}{E J} \frac{\partial M}{\partial X} ds + \int x \frac{T}{G F} \frac{\partial T}{\partial X} ds + \\ \quad + \int \alpha t \frac{\partial N}{\partial X} ds \end{cases}$$

que podía haberse obtenido directamente de la ecuación de los trabajos, tomando la derivada parcial respecto a X en la cual se reemplazará X por X' , X'' , ... sucesivamente (1).

(1) Para las vigas de enrejado múltiple de altura constante, o sea formadas por dos cabezas paralelas unidas por un enrejado múltiple se puede admitir, sin grave error, que la cabeza resiste a esfuerzo normal N y al momento de flexión M , y que el enrejado resiste al esfuerzo de corte T . En

Si ponemos

$$(36) \quad L = \int \frac{N^2 ds}{2EF} + \int \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int x \frac{T^2 ds}{2GF}$$

y si $L=0$ y $t=0$, la (35) se convierte en

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

tal caso habrá que reemplazar en la (35) F y J de las dos primeras integrales por el área y el momento de inercia respecto al eje de flexión de la sección de las dos cabezas de la viga; veamos ahora cómo se calcula la tercera integral.

Supongamos que el enrejado sea simétrico y que las barras formen con la normal a las cabezas el ángulo α ; llamemos D el esfuerzo en una barra, ω su sección recta, h_a la altura teórica de la viga. El trabajo de deformación correspondiente a una sola barra queda expresado evidentemente por

$$D^2 \frac{h}{\cos \alpha} \\ 2 E \omega$$

y por lo tanto, como entran dos barras en un trozo de viga de longitud igual a una diagonal de malla paralela a las cabezas, o sea de longitud $\frac{2h}{n} \operatorname{tg} \alpha$ (siendo n el número característico del enrejado múltiple, o sea el número de partes en que queda dividida una barra de un sistema por las barras del otro sistema), el trabajo elemental de deformación producido por el esfuerzo de corte quedará expresado por

$$2 \frac{D^2 \frac{h}{\cos \alpha}}{2 E \omega} \cdot \frac{ds}{\frac{2h}{n} \operatorname{tg} \alpha}$$

o sea por

$$\frac{n D^2 ds}{2 E \omega \operatorname{sen} \alpha}$$

pero

$$D = \frac{T}{n \cos \alpha}$$

por consiguiente, ese trabajo elemental de deformación queda expresado también por

$$\frac{1}{n \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha} \frac{T^2 ds}{2 E \omega}$$

y si $\alpha=45^\circ$, por

$$\frac{\sqrt{2}}{n} \frac{T^2 ds}{E \omega}$$

Por consiguiente, en la tercera integral de la (35) hay que introducir la derivada de esta expresión respecto a X .

pero L representa notoriamente el trabajo de deformación del sólido cuando las fuerzas externas que actúan sobre él crecen gradualmente de intensidad desde el valor cero hasta el valor final; resulta entonces esta otra manera de determinar las incógnitas X , de acuerdo con el teorema del trabajo mínimo: Se expresa el trabajo de deformación del sólido en función de las fuerzas externas y de las X y se igualan a cero las derivadas parciales respecto a X .

30. EJEMPLO I.—Una viga inclinada AB (fig. 17) rígidamente empotrada en B , articulada en A con rótula fija está cargada con una carga vertical Q uniformemente repartida sobre toda su longitud l ; se piden las componentes X' , X'' normal y axial, respectivamente, de la reacción de la rótula, independientemente de una variación de temperatura.

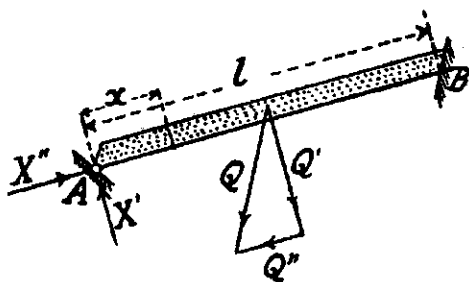


Fig. 17

Para una sección transversal cualquiera a la distancia x de la rótula se tiene, designando con Q' y Q'' respectivamente, las componentes normal y axial de la carga total Q :

$$\begin{array}{lll} N_0 = \frac{Q''}{l} x & M_0 = -\frac{Q'}{l} \frac{x^2}{2} & T_0 = -\frac{Q'}{l} x \\ N' = 0 & M' = x & T' = 1 \\ M'' = 0 & M'' = 0 & T'' = 0 \end{array}$$

Luego:

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q''}{l} x - X'' \\ M &= -\frac{Q'}{l} \frac{x^2}{2} + X' x \\ T &= -\frac{Q'}{l} x + X' \end{aligned}$$

Con estos valores las (34) se convierten en (suponiendo además la viga isótropa y de sección constante):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \left(X' x - \frac{Q' x^2}{2l} \right) x dx + \frac{5}{8} \rho^2 x \int_0^l \left(X' - \frac{Q'}{l} x \right) dx \\ 0 &= \int_0^l \left(\frac{Q''}{l} x - X'' \right) dx \end{aligned}$$

de las cuales se obtiene:

$$X' = \frac{3}{8} Q' \frac{1 + 10x \frac{\rho^2}{l^2}}{1 + 7,5x \frac{\rho^2}{l^2}}$$

$$X'' = -\frac{Q''}{2}$$

31. EJEMPLO II.—Viga horizontal empotrada en un extremo y apoyada en el otro. *Determinación de la reacción de apoyo.*—Una viga horizontal de longitud l está solicitada por una carga uniformemente repartida p por metro corrido y se apoya horizontalmente en el extremo A y está empotrada en el extremo B; se pide la reacción X del apoyo A. Aunque esta reacción no difiere del valor de X' del ejemplo precedente, coincidiendo este problema con el otro cuando se supone $Q''=0$, queremos tratar este ejercicio presentándolo como aplicación del teorema del trabajo mínimo, admitiendo como en el otro ejemplo, que la variación de temperatura sea 0 y que los desplazamientos de los apoyos sean igualmente nulos, y por lo tanto $L=0$. Reemplazando ds por dx y observando que en este caso $H=0$, la (35) se convierte en:

$$(37) \quad 0 = \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int_0^l x \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial X} dx$$

llamando x la distancia horizontal de una sección cualquiera al extremo A, se tiene

$$T = X - px \quad M = Xx - \frac{px^2}{2}$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X} = x$$

con estos valores, y suponiendo E, G, F, J constantes y escribiendo $J = F\rho^2, G = \frac{8}{3}E$, la (37) se convierte en

$$0 = \int_0^l \left(Xx^2 - p \frac{x^3}{2} \right) dx + \frac{8}{3} x \rho^2 \int_0^l (X - px) dx$$

y haciendo la integración

$$0 = \frac{l^3}{3} \left(X - \frac{3}{8} pl \right) + \frac{8}{3} x \rho^2 l \left(X - \frac{pl}{2} \right)$$

de donde

$$(38) \quad X = \frac{3}{8} pl \frac{1 + 10x \frac{\rho^2}{l^2}}{1 + 7,5x \frac{\rho^2}{l^2}}$$

para una sección rectangular de altura h se tiene $\chi = \frac{6}{5}$; $\rho^2 = \frac{1}{12} h^2$ y entonces suponiendo $\frac{h}{l} = \frac{1}{6}$ (valor excepcionalmente grande) se tiene

$$X \approx 1.01 \cdot \frac{3}{8} p l$$

Si se recuerda que $\frac{3}{8} p l$ es el valor de X cuando se desprecian las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte, se ve que la influencia debida a tales deformaciones es bien pequeña respecto a la debida al momento de flexión, y en la mayoría de los casos puede despreciarse. Sin embargo, en algunos casos la diferencia es sensible; para una sección doble T, p. ej.; de altura suficiente para que se pueda considerar que el esfuerzo de corte se reparte uniformemente en la sección F_t del alma vertical, se tiene $\chi = \frac{F_t}{F}$, mientras que ρ tiende al límite $\frac{h}{2}$; suponiendo $\chi = 2.5$; $\rho = \frac{h}{2}$ y $\frac{h}{l} = \frac{1}{8}$ la (38) nos da

$$X \approx 1.05 \cdot \frac{3}{8} p l$$

32. EJEMPLO III.—Viga horizontal imperfectamente empotrada en los extremos.—Determinación de las reacciones de empotramiento.—Con los símbolos ya adoptados para este caso de flexión en el N.º 38, designando ahora con α y β las rotaciones producidas por el momento de flexión en las secciones de empotramiento (1), el trabajo virtual desarrollado por las reacciones de imposta A , M_a , B , M_b en la deformación supuesta, queda dado por la expresión

$$L = M_a \alpha + M_b \beta - B y_b$$

Llamando R_l la resultante de todas las cargas que solicitan la viga, M_l su momento respecto al extremo B, y tomando en cuenta las ecuaciones de la Estática

$$(39) \quad A + B - R_l = 0 \quad M_a + A l - M_l - M_b = 0$$

la expresión anterior puede escribirse también

$$(40) \quad L = A (l \beta + y_b) + M_a (\alpha + \beta) - R_l y_b - M_l \beta$$

Para determinar A y M_a se tienen entonces las ecuaciones de condición

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} L' = \frac{\partial L}{\partial A} &= l \beta + y_b = \\ &= \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial A} dx + \int_0^l x \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial A} dx \\ L'' = \frac{\partial L}{\partial M_a} &= \alpha + \beta = \\ &= \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx + \int_0^l x \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial M_a} dx \end{aligned} \right.$$

(1) Como en este estudio se toman en cuenta también las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte, las inclinaciones de las tangentes extremas de la elástica son distintas de α y β .

Llamando R_x la resultante correspondiente a la sección S de las cargas que actúan en el trozo $AS=x$ de la viga y con M_x su momento respecto al baricentro de la sección S ; el esfuerzo de corte T_x y el momento de flexión M_x para dicha sección pueden expresarse entonces como sigue:

$$T_x = A - R_x$$

$$M_x = M_a + A \cdot x - M_x$$

y entonces

$$\frac{\partial T_x}{\partial A} = 1$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial M_a} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial A} = x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_a} = 1$$

con lo cual las (41) se transforman en

$$(42) \quad \begin{cases} l\beta + y_B = \int_0^l \frac{M_a + A \cdot x - M_x}{EJ} x dx + \int_0^l x \frac{A - R_x}{GF} dx \\ \alpha + \beta = \int_0^l \frac{M_a + A \cdot x - M_x}{EJ} dx \end{cases}$$

Supongamos homogéneo el material, por lo tanto, E y G constantes; admitamos en seguida para mayor generalidad que la viga sea de sección ligeramente variable, y apliquemos como aproximación la teoría de la viga prismática; indiquemos con F_0 y $J_0 = F_0 \rho^2$ el área y el momento de inercia de una determinada sección transversal, y pongamos $J = \psi J_0$; $F = \psi F_0$; $\psi = \frac{E}{G} \rho^2$; entonces las (42) pueden escribirse:

$$(43) \quad \begin{cases} EJ_0 (l\beta + y_B) = M_a \int_0^l \frac{x}{\psi} dx + A \left[\int_0^l \frac{x^2}{\psi} dx + \psi \int_0^l x \frac{dx}{\psi'} \right] - \\ \quad - \int_0^l \frac{M_x}{\psi} x dx - \psi \int_0^l x \frac{R_x}{\psi'} dx \\ EJ_0 (\alpha + \beta) = M_a \int_0^l \frac{dx}{\psi} + A \int_0^l \frac{x}{\psi} dx - \int_0^l \frac{M_x}{\psi} dx \end{cases}$$

de las cuales se deducen en cada caso particular los valores de A y M_a , y por lo tanto, de las (39) los de B y M_b .

De este caso generalísimo de flexión se deducen inmediatamente todos los otros correspondientes a otras condiciones de apoyo de la viga.

33. EJEMPLO IV.—Viga continua (1).—Ecuación de los tres momentos.—Reemplacemos en las (43) A por su expresión en función de M_b , obtenida de la segunda de las (39) y manteniendo el mismo significado de los símbolos ya dados en el número precedente, pongamos para simplificar:

$$H = \frac{1}{l} \left\{ \int_0^l \left(\frac{M_l}{l} x - M_x \right) \frac{x}{\psi} dx + \psi \int_0^l x \left(\frac{M_l}{l} - R_x \right) \frac{dx}{\psi'} \right\}$$

$$H' = \int_0^l \left(\frac{M_l}{l} x - M_x \right) \frac{dx}{\psi}$$

(1) C. Guidi, *Sulla teoria della trave continua*, «Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino», 1890. Otra solución de la viga continua puede obtenerse del teorema de Maxwell (v. n. 40 b).

o sea, llamando T_o y M_o las solicitaciones T_x y M_x para la viga simplemente apoyada en los extremos

$$(44) \quad \begin{cases} H = \frac{1}{l} \left\{ \int_0^l \frac{M_o}{\vartheta} x dx + \psi \int_0^l x \frac{T_o}{\vartheta'} dx \right\} \\ H' = \int_0^l \frac{M_o}{\vartheta} dx \end{cases}$$

Con esto, y dividiendo el primer miembro de las (43) por l , éstas se convierten en

$$(45) \quad \begin{cases} EJ_o \left(\beta + \frac{y_B}{l} \right) = \frac{M_A}{l^2} \left[\int_0^l \frac{x(l-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^l \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + \\ + \frac{M_B}{l^2} \left[\int_0^l \frac{x^2}{\vartheta} dx + \psi \int_0^l \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + H \end{cases}$$

$$(46) \quad EJ_o (\alpha + \beta) = \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{l-x}{\vartheta} dx + \frac{M_B}{l} \int_0^l \frac{x}{\vartheta} dx + H'$$

Restando en seguida la primera de la segunda se obtiene:

$$(47) \quad \begin{cases} EJ_o \left(\alpha - \frac{y_B}{l} \right) = \frac{M_A}{l^2} \left[\int_0^l \frac{(l-x)^2}{\vartheta} dx + \psi \int_0^l \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + \\ + \frac{M_B}{l^2} \left[\int_0^l \frac{x(l-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^l \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + H' - H \end{cases}$$

Consideremos ahora dos tramos sucesivos l_1, l_2 de una viga continua, y conservando los mismos símbolos ya adoptados anteriormente, y designando por γ_2 la rotación correspondiente al apoyo C_2 producida por el momento de flexión (1), apliquemos la (45) al tramo l_1 , con lo que se obtiene:

$$(48) \quad \begin{cases} EJ_o \left(-\gamma_2 + \frac{y_2 - y_1}{l_1} \right) = \frac{M_1}{l_1^2} \left[\int_0^{l_1} \frac{x(l_1-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^{l_1} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + \\ + \frac{M_2}{l_1^2} \left[\int_0^{l_1} \frac{x^2}{\vartheta} dx + \psi \int_0^{l_1} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + H_1 \end{cases}$$

mientras que la (47) aplicada a tramo l_2 nos da

$$(49) \quad \begin{cases} EJ_o \left(\gamma_2 - \frac{y_3 - y_2}{l_2} \right) = \frac{M_2}{l_2^2} \left[\int_0^{l_2} \frac{(l_2-x)^2}{\vartheta} dx + \psi \int_0^{l_2} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + \\ + \frac{M_3}{l_2^2} \left[\int_0^{l_2} \frac{x(l_2-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^{l_2} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + H_2' - H_2 \end{cases}$$

(1) En este estudio se tiene en cuenta también las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte, y por lo tanto, la elástica presenta una discontinuidad de primer orden en correspondencia a un apoyo; en efecto el $\frac{dy_2}{dx} = \frac{\chi}{GF}$ T del N.º 95 sufre un salto brusco, aunque no varíe F. Resulta que la elástica presenta un punto de ángulo en el apoyo, o sea dos tangentes distintas, cuyas inclinaciones no hay que confundir con la rotación γ .

Sumando las (48) y (49) se obtiene la ecuación de los tres momentos en su forma más general, o sea

$$(50) \quad \left(\begin{aligned} & \frac{M_1}{l_1^2} \left[\int_0^{l_1} \frac{x(l_1-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^{l_1} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] + M_2 \left[\frac{1}{l_1^2} \left(\int_0^{l_1} \frac{x^2}{\vartheta} dx + \right. \right. \\ & \left. \left. + \psi \int_0^{l_1} \frac{x dx}{\vartheta'} \right) + \frac{1}{l_2^2} \left(\int_0^{l_2} \frac{(l_2-x)^2}{\vartheta} dx + \psi \int_0^{l_2} \frac{x dx}{\vartheta'} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{M_3}{l_2^2} \left[\int_0^{l_2} \frac{x(l_2-x)}{\vartheta} dx - \psi \int_0^{l_2} \frac{x dx}{\vartheta'} \right] = - (H_1 + H_2' - H_2) + \right. \\ & \left. + E J_0 \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{y_3 - y_2}{l_2} \right) \right) \end{aligned} \right.$$

en la cual, conforme a la (44)

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 + H_2' - H_2 &= \frac{1}{l_1} \left(\int_0^{l_1} \frac{M_0}{\vartheta} x dx + \psi \int_0^{l_1} \frac{x T_0}{\vartheta'} dx \right) \\ &+ \frac{1}{l_2} \left(\int_0^{l_2} \frac{M_0}{\vartheta} (l_2 - x) dx - \psi \int_0^{l_2} \frac{x T_0}{\vartheta'} dx \right) \end{aligned} \right.$$

Si la viga es de sección constante se tiene $\vartheta = \vartheta' = 1$, $\chi = \text{cte.}$ y haciendo también $\frac{E}{G} = \frac{5}{3}$, la (50) después de hacer la integración se convierte en:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} & l_1 M_1 \left(1 - 15 \frac{\rho^2}{l_1^2} x \right) + 2(l_1 + l_2) M_2 \left(1 + \frac{15}{2} \frac{\rho^2}{l_1 l_2} x \right) + \\ & + l_2 M_3 \left(1 - 15 \frac{\rho^2}{l_2^2} x \right) = -6(H_1 + H_2' - H_2) + \\ & + 6EJ \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{y_3 - y_2}{l_2} \right) \end{aligned} \right.$$

en la cual, por ser $\int_0^l T_0 dx = 0$ debe ponerse:

$$(53) \quad H_1 + H_2' - H_2 = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} M_0 x dx + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} M_0 (l_2 - x) dx$$

La primera integral representa el momento estático de la *superficie de momentos*, o sea del diagrama de los momentos M_0 para el primer tramo, respecto a la vertical del apoyo izquierdo. La segunda integral representa la cantidad análoga para el segundo tramo, pero respecto a la vertical del apoyo derecho.

Para una carga uniformemente repartida de intensidad p se tiene

$$\int_0^l M_0 x dx = \int_0^l M_0 (l - x) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} p l^2 \cdot l = \frac{l}{24} p l^2$$

luego

$$H_1 + H_2' - H_2 = \frac{1}{24} (p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3)$$

para una carga concentrada a las distancias a y b de los apoyos se tiene:

$$\int_0^l M_0 x dx = \frac{P a b}{l} \cdot \frac{1}{2} l \left[\frac{l}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - a \right) \right] = \frac{1}{6} P a (l^2 - a^2)$$

y análogamente:

$$\int_0^l M_0 (l-x) dx = \frac{1}{6} P b (l^2 - b^2)$$

por consiguiente, para un conjunto de cargas concentradas

$$H_1 + H_2' - H_2 = \frac{1}{6} \left[\frac{\Sigma P a (l_1^2 - a^2)}{l_1} + \frac{\Sigma P b (l_2^2 - b^2)}{l_2} \right]$$

Entonces si la viga continua es de sección constante y está cargada simultáneamente con cargas uniformemente repartidas y cargas concentradas, la (52) se convierte en

$$(54) \left\{ \begin{aligned} & l_1 M_1 \left(1 - 15 \frac{\rho^2}{l_1^2} \chi \right) + 2 (l_1 + l_2) M_2 \left(1 + \frac{15}{2} \frac{\rho^2}{l_1 l_2} \chi \right) + l_2 M_3 \left(1 - 15 \frac{\rho^2}{l_2^2} \chi \right) = \\ & = - \frac{\Sigma P a (l_1^2 - a^2)}{l_1} - \frac{\Sigma P b (l_2^2 - b^2)}{l_2} - \frac{1}{4} (p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3) + 6 E J \left(\frac{y_4 - y_1}{l_1} - \frac{y_3 - y_2}{l_2} \right) \end{aligned} \right.$$

Si la altura de la viga es pequeña respecto a la longitud de los tramos, los términos multiplicados por $\frac{\rho^2}{l_1^2}$, $\frac{\rho^2}{l_1 l_2}$, $\frac{\rho^2}{l_2^2}$ se hacen despreciables al lado de la unidad, o sea: en la determinación de los momentos en los apoyos pueden despreciarse las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte al lado de las producidas por el momento de flexión (1).

§ 2. DEFORMACIONES

34. El desplazamiento δ_m del punto de aplicación de una carga cualquiera P_m en la dirección de P_m se deduce inmediatamente de la (31), haciendo $P_m = 1$ y anu-

(1) Para las vigas de enrejado múltiple se hará en las fórmulas precedentes, conforme a lo que se ha indicado en la nota de la pág. 5.

$$\chi = 1 \quad \psi = \frac{2 \sqrt{2} J_0}{n \omega_0} \quad \vartheta' = \frac{m}{\omega_0}$$

y en las (52) se pondrá

$$\frac{12 \sqrt{2} \cdot J}{n \omega}$$

en vez de $15 \rho^2 \chi$.

lando todas las otras cargas y las cantidades X estáticamente indeterminadas. Indicando con C_i y con N_i, M_i, T_i las reacciones de apoyo y las solicitaciones correspondientes a tal condición de carga, y atribuyendo a los desplazamientos los valores correspondientes a la condición de carga efectiva, suponiendo además que la variación de temperatura sea uniforme, la (31) nos da

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_m + \sum C_i \Delta c &= \int \frac{N_i N ds}{EF} + \int \frac{M_i M ds}{EJ} + \\ &+ \int x \frac{T_i T ds}{GF} + \int \alpha t N_i ds \end{aligned} \right.$$

O también observando que

$$C_i = \frac{\partial C}{\partial P_m}, \quad N_i = \frac{\partial N}{\partial P_m}, \quad M_i = \frac{\partial M}{\partial P_m}, \quad T_i = \frac{\partial T}{\partial P_m}$$

se tiene

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_m + \sum \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c &= \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_m} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_m} ds + \\ &+ \int x \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P_m} ds + \int \alpha t \frac{\partial N}{\partial P_m} ds \end{aligned} \right.$$

Para apoyos absolutamente fijos o móviles sin frotamiento desaparece el trabajo de las reacciones; si se anula también la variación de temperatura resulta sencillamente

$$(57) \quad \delta_m = \frac{\partial L}{\partial P_m}$$

o sea, el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P_m en la dirección de P_m es, en este caso, igual a la derivada parcial del trabajo de deformación respecto a la carga (1).

Si en el punto de la estructura cuyo desplazamiento se busca no hay aplicada ninguna carga exterior, se aplicará una carga ficticia cualquiera P en dirección del desplazamiento buscado (contenida en cada caso en el plano de las fuerzas), y en seguida, se la hace igual a cero.

Al calcular el desplazamiento δ con la (56) hay que recordar que no sólo las cargas P , sino también las cantidades X pueden considerarse como variables independientes, y por lo tanto, cuando se diferencia respecto a una carga P se pueden considerar las X como constantes.

35. Recordando que el trabajo de un par queda medido por el producto de su momento por la rotación que experimenta la sección en que está aplicado, se obtienen

(1) Castigliano, I. 6.

inmediatamente expresiones análogas a las (55), (56) y (57) para la rotación φ_m que sufre la sección transversal en un punto dado m del eje del sólido, a consecuencia de la deformación; y precisamente

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_m + \Sigma C_i \Delta c &= \int \frac{N_i N}{EF} ds + \int \frac{M_i M}{EJ} ds + \\ &+ \int \chi \frac{T_i T}{GF} ds + \int a_i t N_i ds \end{aligned} \right.$$

en que C_i , N_i , M_i , y T_i representan las reacciones de apoyo y las sollicitaciones generadas *exclusivamente* por un par de momento igual a uno aplicado a la sección cuya rotación se busca. O también:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_m + \Sigma \frac{\partial C}{\partial M_m} \Delta c &= \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial M_m} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_m} ds + \\ &+ \int \chi \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial M_m} ds + \int a t \frac{\partial N}{\partial M_m} ds \end{aligned} \right.$$

y si el trabajo producido por las reacciones es nulo, y si es nula también la variación de temperatura

$$(60) \quad \varphi_m = \frac{\partial L}{\partial M_m}$$

en las cuales M_m representa el momento de un par real o ficticio, que tiende a producir la rotación φ_m en el punto considerado.

La (60) expresa el teorema:

Si $L=0$, $t=0$ la rotación φ_m de una sección transversal del sólido en el sentido del momento M_m de una pareja aplicada a él es igual a la derivada parcial del trabajo de deformación respecto al momento.

36. EJEMPLO 1.—*Flecha de curvatura de una consola.*—Una viga horizontal AB de largo l encastada en B está cargada por una carga uniformemente repartida de intensidad p y por una carga concentrada P en el extremo libre A; se pide la flecha f de curvatura, considerando el empotramiento perfecto, y por lo tanto $L=0$. De la fórmula (56) se tiene

$$(61) \quad f = \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_0^l \chi \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P} dx$$

en la cual hay que poner, para una sección a la distancia x del extremo libre

$$\begin{aligned} M &= -Px - \frac{px^2}{2} \\ T &= -P - px \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x \quad \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

con cuyos valores, suponiendo, como en el ejemplo del N.º 31 que E, G, F, J son constantes, y poniendo $J = F \rho, G = \frac{5}{2} E$ la ecuación (61) se convierte en

$$(61') \quad f = \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^l \left(P x^2 + \frac{p x^3}{2} \right) dx + \frac{5}{2} \chi \rho^2 \int_0^l (P + p x) dx \right\}$$

y efectuando la integración

$$(62) \quad f = \frac{l^3}{EJ} \left\{ \frac{P}{3} \left(1 + \frac{15}{2} \chi \frac{\rho^2}{l^2} \right) + \frac{p l}{8} \left(1 + 10 \chi \frac{\rho^2}{l^2} \right) \right\}$$

Si no existiese la carga P, convendría para la determinación de f hacer uso de la ecuación (56) suponiendo la existencia de P y suprimir después en la (61') los términos en P.

Aplicando el teorema de los trabajos virtuales no es necesaria esa suposición. Se tendrá en efecto:

$$M_1 = -1 \cdot x, \quad T_1 = -1$$

$$M = -\frac{p x^2}{2}, \quad T = -p x$$

y por consiguiente, la misma ecuación (61') sin los términos en P.

Si la longitud de la viga es grande respecto a ρ la deformación debida al esfuerzo de corte resulta despreciable al lado de la producida por el momento de flexión, como se ve en la fórmula. (61).

Para el caso de momento de inercia J variable conviene introducir en la (61) su expresión en función del momento de inercia de la sección de empotramiento.

37. EJEMPLO H.—Viga horizontal empotrada en un extremo.—Determinación de la inclinación del extremo libre.—Se pide la rotación de la sección del extremo libre de la viga considerada en el ejemplo precedente, o sea el ángulo δ que la tangente en el extremo libre de la elástica forma con el eje primitivo de la viga. Con este fin supongamos que esa sección esté solicitada por el momento $-M$ de un par ficticio.

La ecuación (59) nos da:

$$(63) \quad \varphi = \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M} dx + \int_0^l x \frac{T}{GE} \frac{\partial T}{\partial M} dx$$

en la cual, para una sección a la distancia x del extremo libre se tiene

$$M = M - P x - \frac{p x^2}{2}, \quad T = -P - p x$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial M} = -1, \quad \frac{\partial T}{\partial M} = 0$$

con cuyos valores la (250) se convierte en

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(M + Px + \frac{px^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EJ} \left(Ml + P \frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6} \right)$$

y haciendo $M=0$

$$\varphi = \frac{l^2}{2EJ} \left(P + \frac{pl}{3} \right)$$

38. EJEMPLO III.—Viga horizontal imperfectamente empotrada en los extremos.—Ecuación de la elástica.—Para determinar el descenso y_c del baricentro C de una sección cualquiera que dista a y b de las secciones extremas izquierda y derecha en la viga ya estudiada en el N.º 32, hagamos la viga estáticamente determinada suprimiéndole los empotramientos; y anulando toda otra carga apliquemos en C una carga concentrada vertical igual a 1. Esta da origen a las reacciones de apoyo $A_1 = 1 \cdot \frac{b}{l}$

y $B_1 = 1 \cdot \frac{a}{l}$; designando con M_1 y T_1 el momento de flexión y el esfuerzo de corte producidos por tal carga en una sección cualquiera de la viga, se tiene para una sección comprimida cualquiera entre $x=0$ y $x=a$

$$M_1 = \frac{b}{l} x \quad T_1 = \frac{b}{l}$$

entre $x=a$ y $x=l$
$$M_1 = \frac{a}{b} (l-x) \quad T_1 = -\frac{a}{l}$$

La ecuación de los trabajos virtuales correspondiente a esta condición de carga y a los desplazamientos efectivos, o sea correspondientes a la verdadera condición de carga, ecuación que nos da la ordenada y_c de la curva elástica, es según la (55)

$$y_c - \frac{a}{l} y_B = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ} dx + \int_0^l x \frac{T_1 T}{GF} dx$$

o sea, introduciendo para M_1 y T_1 sus valores:

$$y_c = \frac{b}{l} \int_0^a \frac{Mx}{EJ} dx + \frac{a}{l} \int_a^l \frac{M(l-x)}{EJ} dx + \frac{b}{l} \int_0^a x \frac{T}{GF} dx - \frac{a}{l} \int_a^l x \frac{T}{GF} dx + \frac{a}{l} y_B$$

La sección C es arbitraria; por lo tanto haciendo en esta ecuación $a=x$, $b=l-x$, $y_c=y$ se obtiene la ecuación de la elástica

$$(64) \quad \begin{cases} y = \frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{Mx}{EJ} dx + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{M(l-x)}{EJ} dx + \frac{l-x}{l} \int_0^x x \frac{T}{GF} dx - \\ - \frac{x}{l} \int_0^l x \frac{T}{GF} dx + \frac{x}{l} y_B \end{cases}$$

Cualquiera que sea la naturaleza de la carga que solicita efectivamente la viga, empleando las notaciones ya adoptadas, y siendo además T_0 y M_0 el esfuerzo de corte y el momento de flexión que existirían en la sección que dista x del origen de coordenadas para el caso de viga simplemente apoyada (y por lo tanto $M_A = M_B = 0$), se tiene

$$M = M_0 + M_A + \frac{M_B - M_A}{l} x \quad T = T_0 + \frac{M_B - M_A}{l}$$

y entonces la ecuación (64) con las notaciones del N.º 32 se convierte en

$$(65) \quad y = \frac{1}{E J_0} \left[\frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{M_0}{\vartheta} x dx + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{l M_0}{\vartheta} (l-x) dx + \right. \\ \left. + \frac{M_A}{l} \left\{ \frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{x(l-x)}{\vartheta} dx + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{l(l-x)^2}{l} dx \right\} + \right. \\ \left. + \frac{M_B}{l} \left\{ \frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{x^2}{\vartheta} dx + \frac{x}{l} \int_x^l \frac{l x (l-x)}{\vartheta} dx \right\} + \right. \\ \left. + \psi \left\{ \int_0^x x \frac{T_0}{\vartheta'} dx - \frac{x}{l} \int_0^l x \frac{T_0}{\vartheta'} dx + \frac{M_B - M_A}{l} \left(\int_0^x x \frac{dx}{\vartheta'} - \frac{x}{l} \int_0^l x \frac{dx}{\vartheta'} \right) \right\} \right] + \\ + \frac{x}{l} y_B$$

Esta ecuación se aplica también a un tramo cualquiera de una viga continua, reemplazando M_A y M_B por los momentos sobre los apoyos izquierdo y derecho del tramo.

39. TEOREMA DE MAXWELL.—Sean A_1 y A_2 dos puntos cualesquiera de un sistema elástico plano en el cual las reacciones de las ligazones no producen trabajo y la temperatura no varía. Apliquemos al punto A_1 en una dirección arbitraria A_1B_1 , pero contenida en el plano del sistema, una fuerza igual a 1: ella producirá en el sistema total ciertas fatigas σ_1 y τ_1 y un desplazamiento del punto A_2 , que medido en cierta dirección, contenida en el plano del sistema lo representaremos por δ_{12} . Apliquemos ahora la misma fuerza 1 al punto A_2 en la dirección A_2B_2 y designemos con σ_2 y τ_2 las fatigas que se producen y con δ_{21} el desplazamiento del punto A_1 en la dirección A_1B_1 . Introduciendo en las ecuaciones de los trabajos virtuales correspondientes a estas dos condiciones de carga, las fatigas correspondientes a una y las deformaciones correspondientes a la otra, obtendremos según la ecuación (30):

$$\delta_{12} = \int \frac{\sigma_1 \sigma_2}{E} dv + \int \frac{\tau_1 \tau_2}{G} dv \\ \delta_{21} = \int \frac{\sigma_2 \sigma_1}{E} dv + \int \frac{\tau_2 \tau_1}{G} dv$$

resulta entonces el teorema ya demostrado en el N.º 22 para las vigas enrejadas: *El desplazamiento de un punto A_1 en la dirección A_1B_1 producido por una fuerza 1 aplicada a un punto A_2 en la dirección A_2B_2 es igual al desplazamiento del punto A_2 en la dirección A_2B_2 producido por la misma fuerza 1 aplicada al punto A_1 en la dirección A_1B_1 .*

Como la rotación φ que sufre una sección por efecto de un par de momento 1 queda medida precisamente por el desplazamiento que sufre el punto de aplicación de una fuerza 1 a la distancia 1 del centro de gravedad de la sección, tenemos que del teorema enunciado pueden deducirse los siguientes, que además pueden demostrarse directamente con facilidad.

La rotación de una sección A_1 en un sentido dado $C_1 D_1$ producido por un par de momento 1 que actúa en la sección A_2 en un sentido dado $C_2 D_2$ es igual a la rotación de la sección A_2 en el sentido $C_2 D_2$ producida por el mismo par 1 actuando en la sección A_1 en el sentido $C_1 D_1$.

El desplazamiento de un punto A_1 en la dirección $A_1 B_1$ producido por un par 1 que actúa en una sección A_2 en el sentido $C_2 D_2$ es igual a la rotación de la sección A_2 en el sentido $C_2 D_2$ producida por una fuerza 1 aplicada al punto A_1 en la dirección $A_1 B_1$.

La rotación de una sección A_1 en el sentido $C_1 D_1$ producida por una fuerza 1 aplicada en A_2 en la dirección $A_2 B_2$ es igual al desplazamiento del punto A_2 en la dirección $A_2 B_2$ producido por un par 1 que actúa en la sección A_1 en el sentido $C_1 D_1$.

40. APLICACIONES.—a) *Viga apoyada en los extremos: línea de influencia del desplazamiento de un punto.*—Se pide la línea de influencia del desplazamiento de C en la viga AB (fig. 18) apoyada en los extremos, o sea, la curva cuyas ordenadas medidas en la vertical a plomo de una carga unitaria móvil den el desplazamiento del punto C.

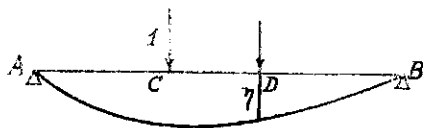


Fig. 18

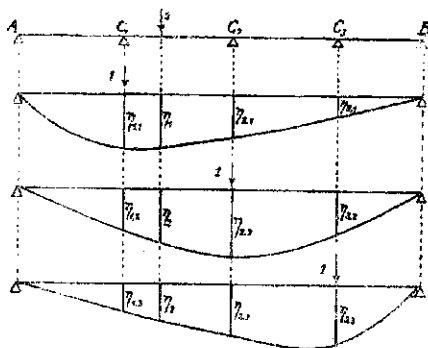


Fig. 19.

Aplicáse en C la carga unitaria y constrúyase la curva elástica correspondiente a la viga, tomando en cuenta si es preciso, la variación de la sección transversal de la viga y las deformaciones producidas por los esfuerzos de corte. En virtud del teorema de Maxwell esta curva elástica es la línea de influencia buscada. En efecto, si la carga 1 en C hace bajar un punto cualquiera D en la cantidad η , la misma carga colocada en D hará bajar a C de la misma cantidad, o sea de η .

b) *Viga continua con apoyos elásticos.*—Para fijar las ideas consideremos una viga continua de 4 tramos (fig. 19) y sean δ_1 , δ_2 , δ_3 respectivamente los asentamientos elásticos de los apoyos intermedios producidos por una carga unitaria que actúa según su eje geométrico. Suprimidos los apoyos intermedios y construidas gráficamente las curvas elásticas (tomando en cuenta la variación eventual de la sección y las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte) correspondientes a una carga unitaria que actúa sucesivamente según las diversas verticales de los apoyos suprimidos, y empleando las notaciones de la figura, las reacciones C de los apoyos intermedios producidas por una carga unitaria real que ocupa una posición cualquiera queda dada por las siguientes ecuaciones lineales, ya que efectivamente, sobre la viga actúan las fuerzas 1, C_1 , C_2 , C_3 :

$$\begin{aligned}\eta_1 - C_1 \eta_{11} - C_2 \eta_{21} - C_3 \eta_{31} &= \delta_1 C_1 \\ \eta_2 - C_1 \eta_{12} - C_2 \eta_{22} - C_3 \eta_{32} &= \delta_2 C_2 \\ \eta_3 - C_1 \eta_{13} - C_2 \eta_{23} - C_3 \eta_{33} &= \delta_3 C_3\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}C_1 (\eta_{11} + \delta_1) + C_2 \eta_{21} + C_3 \eta_{31} &= \eta_1 \\ C_1 \eta_{12} + C_2 (\eta_{22} + \delta_2) + C_3 \eta_{32} &= \eta_2 \\ C_1 \eta_{13} + C_2 \eta_{23} + C_3 (\eta_{33} + \delta_3) &= \eta_3\end{aligned}$$

En seguida se tiene según el teorema mencionado $\eta_{mn} = \eta_{nm}$.

Las ecuaciones anteriores pueden aplicarse también al caso en que los apoyos intermedios estén formados por flotadores. Llamando F la sección horizontal del flotador, supuesto prismático, y γ el peso específico del líquido, se pondrá

$$\gamma F \delta = 1$$

de donde

$$\delta = \frac{1}{\gamma F}$$

Es interesante observar que de las diversas curvas elásticas (tantas como apoyos intermedios) que conviene trazar con este método, sólo requieren una construcción distinta las dos extremas, o sea las correspondientes a la carga unitaria que actúa según la vertical del segundo apoyo y a la carga unitaria que actúa según la vertical del penúltimo apoyo, o sólo una de ellas cuando la construcción es simétrica. Esta propiedad no carece de importancia, ahorrando no poco trabajo, y merece por lo tanto una breve demostración (1).

Sea AB (fig. 20) una viga continua apoyada de cualquier modo en los extremos A y B . Y en los puntos intermedios $C_1, \dots, C_r, \dots, C_n$. Imaginemos suprimidos todos los apoyos intermedios y carguemos la viga AB de longitud l con una carga 1 aplicada en C_1 , y construyamos con los métodos conocidos la elástica (línea de puntos en la figura) debida exclusivamente al momento de flexión, tomando en cuenta la variación eventual de la sección transversal de la viga; agreguemos después, en la forma conocida, a las ordenadas de esa curva las debidas al esfuerzo de corte; se obtiene así la elástica final $A_1 C_1' B_1$ dibujada de línea llena, que presenta un punto anguloso en C_1' sobre la vertical de la carga.

* Análogamente se construye la elástica $A'_n C_n B_n$ producida por la carga 1 que actúa en la vertical del apoyo C_n . Si la viga es simétrica, tal curva es, evidentemente, simétrica con la primera, y no necesita por lo tanto una nueva construcción.

Sentado esto supongamos que se quiere la elástica producida por la carga 1 actuando según la vertical del apoyo C_r . Podemos considerarla como el conjunto de dos curvas elásticas $C_r'' A_r$ y $C_r'' B_r$, correspondientes a dos vigas empotradas oblicuamente en correspondencia a la vertical de C_r y libres en el resto, solicitadas en los extremos por fuerzas verticales dirigidas hacia arriba, iguales respectivamente a $1 \cdot \frac{x_r'}{l}$ y $1 \cdot \frac{x_r}{l}$ siendo x_r y x_r' las distancias de la vertical de C_r a la vertical de A y a la de B , respectivamente. Hagamos ahora una interpretación análoga de las dos ramas $N'A_n$ y $M'B_n$ (pertencientes a las dos curvas elásticas trazadas precedentemente) situadas respectivamente a la izquierda y a la derecha de la vertical de C_r , resulta evidente que debe existir afinidad entre las curvas $C_r'' A_r$ y $N'A_n$ y las $C_r'' B_r$ y $M'B_n$, en la razón $\frac{x_r'}{x_n}$ y $\frac{x_r}{x_1}$, y esto es válido no sólo para las

(1) C. Guidi Sul calcolo della trave continua, «Il Cemento», 1908.

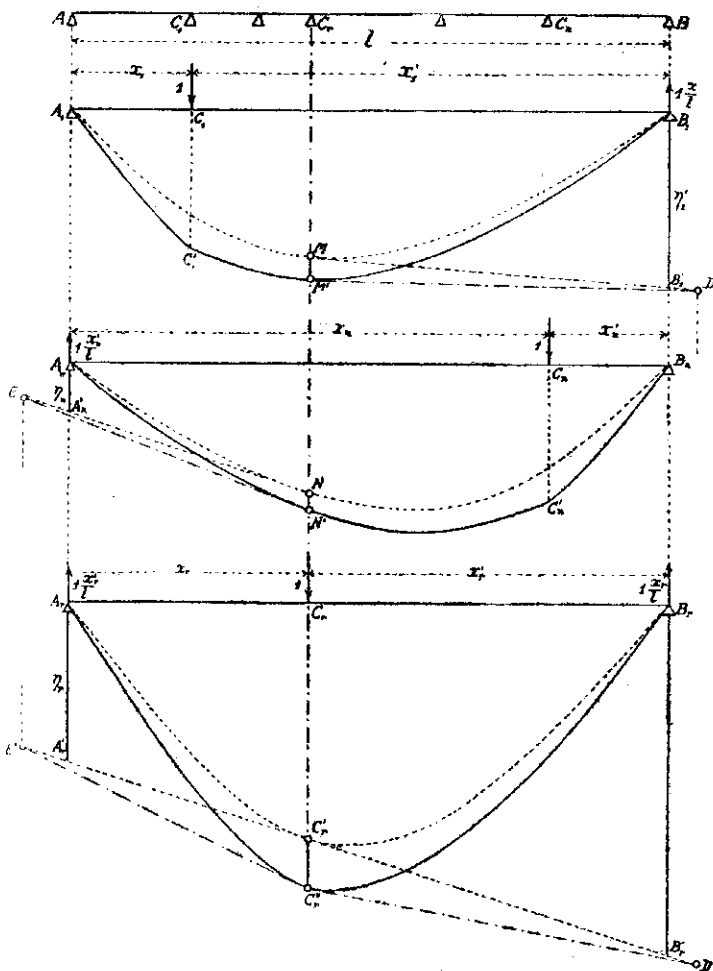


Fig. 20

curvas elásticas finales, sino también para las de puntos en la figura, debidas sólo al momento de flexión. Si se trazan entonces por los puntos M y N las tangentes a las curvas elásticas primera y última, debidas sólo al momento de flexión, de manera que se tengan en las verticales de B_1 y A_n las ordenadas $B_1 B'_1 = \eta'_1$ y $A_n A'_n = \eta'_n$, y se toma

$$A_r A'_r = \eta_n \frac{x_r'}{x_n'} = \eta_r \quad \text{y} \quad B_r B'_r = \eta'_1 \frac{x_r}{x_1} = \eta_r'$$

la recta $A'_r B'_r$ será la tangente en C_r' a la elástica $A_r C_r' B_r$ debida sólo al momento de flexión. Con las razones de afinidad indicadas y contando las ordenadas desde esta tangente se pueden trazar las dos ramas $C_r' A_r$, $C_r' B_r$; no falta más que aplicar hacia arriba, a partir de estas curvas, las ordenadas que representan las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte, lo que se hace multiplicando todavía las ordenadas correspondientes por las razones de afinidad mencionadas, comprendidas entre las curvas (llenas y de puntos en las figuras) descritas precedentemente.

Tracemos por M' y N' las tangentes a las curvas elásticas finales (primera y última) hasta cortar en D y E , respectivamente, a las tangentes ya trazadas; proyectemos verticalmente estos puntos en D' y E' sobre $A_r' B_r'$ y tomemos en seguida

$$C_r' C_r'' = MM' \frac{x_r}{x_1} = NN' \frac{x_r'}{x_n'}$$

las rectas $E' C_r''$, $D' C_r''$ serán las tangentes en el punto anguloso C_r de la elástica final. Refiriéndose a estas tangentes, puede evitarse el trazado preliminar de la curva $A_r C_r' B_r$, a condición de que los puntos de intersección D y E se hayan determinado con exactitud suficiente, lo que requiere especial cuidado, en vista del ángulo pequeño con que se forman esas intersecciones. Si la sección transversal de la viga, en lo que respecta a la resistencia al esfuerzo de corte, es o puede considerarse por aproximación como constante, los puntos D y E caen sobre las verticales de B y A , como es fácil verlo, y quedan bien determinados, por consiguiente (1).

En el ejemplo de viga continua con apoyos elásticos desarrollado aquí se han supuesto fijos los apoyos extremos, lo que puede admitirse en la mayoría de los casos prácticos: vamos a indicar sin embargo, qué modificación sufre el desarrollo cuando los apoyos extremos ceden elásticamente también. La única variante consiste en el hecho de que las ordenadas extremas de cada una de las curvas elásticas producidas por la carga unitaria colocada sucesivamente a plomo del 1er., 2.º, ... apoyo de la viga, suprimiendo los apoyos intermedios, no son ya nulas sino que tienen ciertos valores conocidos, estáticamente determinados. Llamando δ_A el acortamiento producido en el pie derecho A por una carga unitaria que actúa según su eje, y dando análogo significado al símbolo δ_B , se tiene, p. ej., para la curva elástica r ésimas, producida por la carga unitaria colocada a plomo del r ésimos apoyo, que sus ordenadas extremas tienen en A y B los valores

$$\frac{x_r'}{l} \delta_A \quad \text{y} \quad \frac{x_r}{l} \delta_B$$

respectivamente. En el resto queda invariado el estudio, y las ecuaciones que determinan las C son siempre las mismas, en las cuales las η van contadas a partir de las nuevas curvas elásticas fundamentales definidas como se ha dicho ahora.

Se habrá observado que en este ejemplo las reacciones de apoyo de la viga producen trabajo; pero esto no excluye la aplicabilidad del teorema de Maxwell, por cuanto que el sistema elástico a que se refiere no está limitado a la viga, sino que incluye también sus pies derechos elásticos, de cuya presencia se puede hacer abstracción gracias al agregado de los términos $\delta_r C_r$.

41. Atribuyendo diversas posiciones a la carga unitaria real, y llevando sobre su vertical el valor de cada C a partir de una base, la línea que une los extremos de las ordenadas correspondientes a una C dada representa la *línea de influencia*, o sea la ley según la cual varía la C cuando se mueve la carga.

Pero si sólo se quiere tener la línea de influencia de la reacción de un apoyo determinado, se puede seguir este otro camino. Imaginemos suprimido el apoyo en cuestión, aplicando en su lugar una carga unitaria, y después de haber determinado con las ecuaciones de Maxwell arriba indicadas, las reacciones correspondientes de todos los apoyos restantes, construyamos la curva elástica de la viga para la sollicitación hipotética mencionada; en virtud del teorema de Maxwell esta curva es la línea de influencia buscada. En efecto, indicando con η la ordenada de tal curva, medida en la vertical de una carga unitaria en una posición cualquiera, con C_r la reacción del apoyo en cuestión, y conservando para η_r y δ_r sus significados, debe tenerse

(1) En efecto, en ese caso las deformaciones producidas por el esfuerzo de corte son proporcionales a x o sea $\frac{dz}{dx} = \text{cte.}$ lo que exige la condición indicada arriba.

$$\eta - C_r \eta_{rr} = \delta_r C_r$$

de donde

$$C_r = \frac{\eta}{\eta_{rr} + \delta_r}$$

y si el apoyo fuese rígido

$$C_r = \frac{\eta}{\eta_{rr}}$$

En uno y otro caso la elástica representa la línea de influencia de C_r a la escala $\eta_{rr} + \delta_r = 1$ o también $\eta_{rr} = 1$.

§ 3. SISTEMAS COMBINADOS

42. En la práctica se encuentran muchos ejemplos de construcciones metálicas o mixtas (madera y fierro) compuestas de vigas solicitadas a tracción, flexión y esfuerzo de corte, unidas y reforzadas por barras solicitadas exclusivamente por esfuerzo axial; o sea, sistemas que participan del tipo de viga de alma llena y de la viga enrejada. Pertenecen a esta categoría de sistemas: una viga armada, un arco metálico para techo reforzado, p. ej., con una cercha Polonceau, etc. Las ecuaciones de condición que deben satisfacer las cantidades X estáticamente indeterminadas para estos sistemas combinados son:

$$\begin{aligned} \Sigma C' \Delta c = & \int \frac{N' N}{EF} ds + \int \frac{M' M}{EJ} ds + \int x \frac{T' T}{GF} ds + \int a t N' ds + \\ & + \Sigma \frac{S' S s}{EF} + \Sigma a t S' s \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

o bajo otra forma que las comprende a todas

$$(66) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} = & \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds + \int x \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial X} ds + \\ & + \int a t \frac{\partial N}{\partial X} ds + \Sigma \frac{S s}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} + \Sigma a t s \frac{\partial S}{\partial X} \end{aligned} \right.$$

43. EJEMPLO I.—*Viga armada con dos manguetas*.—La viga AB (fig. 21) armada con tres tirantes 1, 2, 3 de longitud s_1, s_2, s_3 respectivamente, y dos manguetas 4 y 5 de longitud h' está cargada en una forma cualquiera y ligada en forma estáticamente determinada, p. ej., con rótula en A y apoyo simple en B.

Representemos con $S_1, S_2, \dots, S_5, F_1, F_2, \dots, F_5$ los esfuerzos y las áreas de las secciones para las barras de la armadura; con N y M respectivamente el esfuerzo normal y el momento de flexión para una sección transversal cualquiera de la viga AB, cuya área designaremos con F , y con J el momento

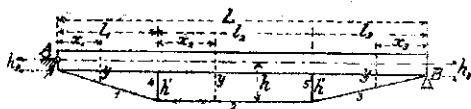


Fig. 21

de inercia respecto al eje de flexión; representaremos con N_0 y M_0 los valores de N y M cuando la viga no tuviese armadura. Finalmente, indiquemos con E , E_1 , E_2 respectivamente, los módulos de elasticidad normales de los materiales de la viga, los tirantes y las manguetas, y con α , α_1 los coeficientes de dilatación térmica para los tirantes y para las manguetas.

Considerada como cantidad estáticamente indeterminada la tensión X en el tirante 2, y empleando las indicaciones de la figura, las sollicitaciones N y M quedan expresadas como sigue: (1).

$$\begin{aligned} S_1 &= X \frac{s_1}{l_1} & S_2 &= X & S_3 &= X \frac{s_3}{l_3} & S_4 &= -X \frac{h-h_0}{l_1} \\ S_5 &= -X \frac{h-h_3}{l_3} \\ N &= N_0 - X & M &= M_0 - Xy \end{aligned}$$

Las deformaciones producidas en la viga AB por los esfuerzos de corte son despreciables al lado de las producidas por el esfuerzo normal N y por el momento de flexión M . Además, si todas las partes de la viga armada fuesen del mismo material, una variación uniforme de temperatura no produciría evidentemente esfuerzos interiores; en cambio, si la viga AB y las barras de la armadura son de material diverso, como p. ej., si la viga AB es de madera, los tirantes de fierro y las manguetas de fundición, una variación de temperatura altera sensiblemente las longitudes de las barras de la armadura, e insensiblemente la de la viga AB, lo que produce variaciones notables en el régimen de los esfuerzos interiores. En tales condiciones la (66) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EF} \int_0^L N \frac{\partial N}{\partial X} dx + \frac{1}{EJ} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial X} dx + \\ + \sum \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} + \sum \alpha l s \frac{\partial S}{\partial X} = 0 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} - \frac{1}{EF} \int_0^L (N_0 - X) dx - \frac{1}{EJ} \int_0^L (M_0 - Xy) y dx + X \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{s_1^2}{F_1 l_1^2} + \frac{s_2}{F_2} + \frac{s_3^2}{F_3 l_3^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h'}{E_2} \left(\frac{(h-h_0)^2}{F_4 l_1^2} + \frac{(h-h_3)^2}{F_5 l_3^2} \right) \right] + t \left[\alpha_1 \left(\frac{s_1^2}{l_1} + s_2 + \frac{s_3^2}{l_3} \right) - \alpha_2 h' \left(\frac{h-h_0}{l_1} + \frac{h-h_3}{l_3} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

poniendo $\varphi^2 = \frac{J}{F}$ se obtiene de ésta

(1) En algunos casos puede resultar útil el agregado de otro tirante oblicuo en el paño central, para unir el extremo de una mangueta con el pie de la otra. En este caso la estructura presenta doble indeterminación; para su cálculo véase nuestra publicación: *Calcoli di stabilità delle scale metalliche aeree Viarengo*, Turin, Bertolero, 1898.

(67)

$$X = \frac{\rho^2 \int_0^L N_0 dx + \int_0^L M_0 y dx - EJ t \left[\alpha_1 \left(\frac{s_1^2}{l_1} + s_1 + \frac{s_3^2}{l_3} \right) - \alpha_2 h' \left(\frac{h-h_0}{l_1} + \frac{h-h_3}{l_3} \right) \right]}{\rho^2 L + \int_0^L y^2 dx + EJ \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{s_1^3}{F_1 l_1^2} + \frac{s_2}{F_2} + \frac{s_3^3}{F_3 l_3^2} \right) + \frac{h'}{E_2} \left(\frac{(h-h_0)^2}{F_4 l_1^2} + \frac{(h-h_3)^2}{F_5 l_3^2} \right) \right]}$$

en la cual

$$y = h_0 + \frac{h-h_0}{l_1} x \quad \text{para el primer paño}$$

$$y = h \quad \text{» » segundo »}$$

$$y = h_3 + \frac{h-h_3}{l_3} x \quad \text{» » tercer »}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^L M_0 y dx = h_0 \int_0^{l_1} M_0 dx_1 + \frac{h-h_0}{l_1} \int_0^{l_1} M_0 x_1 dx_1 + h \int_0^{l_2} M_0 dx_2 + h_3 \int_0^{l_3} M_0 dx_3 + \\ + \frac{h-h_3}{l_3} \int_0^{l_3} M_0 x_3 dx_3 \end{aligned}$$

$$\int_0^L y^2 dx = \frac{h^2}{3} \left[l_1 \left\{ 1 + \frac{h_0}{h} + \left(\frac{h_0}{h} \right)^2 \right\} + 3 l_2 + l_3 \left\{ 1 + \frac{h_3}{h} + \left(\frac{h_3}{h} \right)^2 \right\} \right]$$

Si los paños extremos son de igual longitud l_1 , como pasa ordinariamente, y si los tirantes tienen la misma sección F_1 , y las manguetas son lo suficientemente cortas para poder despreciar su deformación elástica y térmica, y es nula la excentricidad de la unión de los tirantes extremos, lo que es recomendable, ($h_0 = h_3 = 0$) se tiene más sencillamente:

(68)

$$X = \frac{\rho^2 \int_0^L N_0 dx + h \left(\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} M_0 x_1 dx_1 + \int_0^{l_2} M_0 dx_2 + \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} M_0 x_3 dx_3 \right) - EJ \alpha t \left(2 \frac{s_1^2}{l_1} + s_2 \right)}{\rho^2 L + \frac{h^2}{3} (2 l_1 + 3 l_2) + \frac{EJ}{E_1 F_1} \left(2 \frac{s_1^3}{l_1^2} + s_2 \right)}$$

Si la viga es horizontal y las cargas son verticales, desaparece la integral que contiene N_0 .

44. EJEMPLO II.—*Viga armada con una sola mangueta.*—Hagamos en las fórmulas precedentes $l_2 = s_2 = 0$; designemos con X la componente de la tensión en los tirantes paralela a AB , y observemos que la comprensión en la mangueta queda dada por la suma de las compresiones en las dos manguetas de la viga armada precedente; entonces obtendremos fácilmente las fórmulas correspondientes a esta otra viga armada.

Con las hipótesis especiales del número anterior, y tomando en cuenta las deformaciones de la mangueta, se tiene con las indicaciones de la fig. 22.

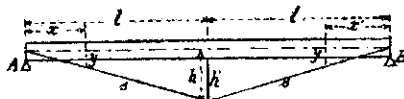


Fig. 22

$$(69) \quad \left\{ X = 3 \frac{\int_0^l M_0 x dx + \int_0^l M_0 x' dx - 2EJts \left(a_1 \frac{s}{h} - a_2 \frac{h'}{s} \right)}{2hl^2 \left[1 + 3 \frac{\rho^2}{h^2} \left(1 + \frac{EF}{E_1 F_1} \frac{s^3}{l^3} + 2 \frac{EF}{E_2 F_2} \frac{h^2 h'}{l^3} \right) \right]} \right.$$

Para una carga uniformemente repartida de intensidad g por metro corrido se tiene:

$$\int_0^l M_0 x dx + \int_0^l M_0 x' dx' = 2 \int_0^l \left(glx - g \frac{x^2}{2} \right) x dx = \frac{5}{12} gl^4$$

Para dos cargas P simétricas, a la distancia a del apoyo más cercano se tiene:

$$\int_0^l M_0 x dx = \int_0^l M_0 x' dx' = Pa \frac{l^2}{2} - P \frac{a^3}{6} = \frac{Pa}{6} (3l^2 - a^2)$$

por consiguiente, para una carga repartida y para un conjunto de cargas concentradas se tiene, independientemente de una variación de temperatura,

$$(70) \quad X = \frac{5gl^4 + 2 \sum Pa(3l^2 - a^2)}{8\mu hl^2}$$

en la cual la letra μ representa el polinomio entre paréntesis del denominador de la (69).

El desplazamiento del nudo central superior se obtiene con el teorema de los trabajos virtuales. Para una carga uniforme de intensidad q se tiene:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta &= 2 \int_0^l \frac{MM'}{EJ} dx \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{EJ} \int_0^l \left[\frac{q}{2} x(2l-x) - X \frac{h}{l} x \right] \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{5}{24} ql^4 - X \frac{hl^2}{3} \right) \end{aligned}$$

y reemplazando X por su expresión

$$(70') \quad \delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)$$

* ¿Cuál sería la tensión que habría que dar artificialmente al tirante para anular el desplazamiento δ ?

(1) En la cual no aparece la integral correspondiente al esfuerzo normal porque $N' = 0$ puede despreciarse la integral correspondiente al esfuerzo de corte.

Llamando X' la componente horizontal de esta tensión y observando que ella produce en la mangueta un esfuerzo dirigido hacia arriba igual a $2X' \frac{h}{l}$ que ocasiona en la viga horizontal una flecha

$$2X' \frac{h}{l} \cdot \frac{(2l)^3}{48EJ} = \frac{X'h l^2}{3EJ}$$

escribiremos

$$\frac{X'h l^2}{3EJ} = \frac{5}{8} \frac{q l^4}{EJ} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)$$

de donde

$$X' = \frac{5}{8} \frac{q l^2}{h} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)$$

y por consiguiente, la tensión horizontal total del tirante es:

$$X + X' = \frac{5}{8} \frac{q l^2}{\mu h} + \frac{5}{8} \frac{q l^2}{h} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{5}{8} \frac{q l^2}{h}$$

En este caso el momento en el apoyo intermedio es el mismo que se tiene para la viga continua con tres apoyos a nivel; en efecto:

$$M = M_0 - (X + X') h = \frac{1}{8} q (2l)^2 - \frac{5}{8} \frac{q l^2}{h} h = -\frac{1}{8} q l^2$$