

Teoría de los equivalentes electromecánicos, sus limitaciones y algunas aplicaciones

PARTÉ I

TEORIA DE LOS EQUIVALENTES Y SUS LIMITACIONES

- 1.—Introducción.
- 2.—Principios generales.
- 3.—Símbolos.
- 4.—Ejemplos
- 5.—Paso de un Sistema al otro (Dualidad-reciprocidad).
- 6.—Instrumentos de medición.

SUMARIO

Esta primera parte de un trabajo en tres, contiene las bases de cómo un problema mecánico tiene su representación eléctrica. Se deja en claro las ventajas de estudiar ciertos problemas desde el punto de vista eléctrico. Esta teoría es conocida, pero desgraciadamente es necesario saber también sus limitaciones.

Se describe luego algunos instrumentos de medida fundamentales para esta clase de estudios.

En la segunda parte de este trabajo se estudiarán algunas aplicaciones a los filtros empleados en radiotelefonía.

Tal como se anuncia al final de este trabajo, la tercera parte se refiere a la aplicación de esta teoría al estudio de lo que pasa en un edificio sometido a un temblor, y cómo se pueden hacer medidas de un edificio ya construído para determinar sus períodos de resonancia, y como correrlos en la forma más efectiva.

I.—INTRODUCCION

El empleo de los circuitos eléctricos equivalentes para resolver cierto tipo de problemas mecánicos es, en general, bastante antiguo y conocido, especialmente por los ingenieros que han tenido que tratar problemas de electroacústica. Sin embargo, muy poco o nada se ha publicado tratando de condensar los dos métodos de representación eléctrica y sus respectivas ventajas y limitaciones. Generalmente sólo se considera uno de los métodos: el electrostático, el que desgraciadamente no es aplicable en muchos casos, lo que origina muchas dificultades.

Este trabajo tiene por objeto presentar la teoría general y los métodos de rutina que han resultado más cómodos en la resolución de una gran cantidad de problemas mecánico-dinámicos que se han presentado.

Esta primera parte es uno de los temas tratados en mi curso de Electrónica y Radiocomunicaciones para el Quinto Año de Ingeniería de la Universidad Católica.

Por otra parte, el hecho de que constantemente se le estén encontrando nuevas aplicaciones en diferentes ramos de la ingeniería, justifica el dedicarle alguna atención a este tema. Así, en el estudio de fundaciones de máquinas que vibran, en el cálculo de algunas piezas de motores, en acústica y en muchas otras ramas, ha ganado este método una gran aceptación por ser una herramienta fácil y segura y a veces permite, cuando las ecuaciones son difíciles de resolver, hacer las mediciones experimentales en circuitos eléctricos dispuestos en un tablero con elementos (inductancias, resistencias, condensadores variables) fáciles de conectar en cualquier forma deseada.

Históricamente hablando, este empleo viene a ser una vuelta atrás de lo hecho en los primeros tiempos por los electricistas que usaban las analogías mecánicas para explicar los fenómenos eléctricos. Efectivamente, las ecuaciones del movimiento de los cuerpos mecánicos se estudió mucho antes que la propagación de la onda eléctrica y era lógico entonces explicar esta como algo mecánico.

Un caso interesante de anotar es el de la dispersión anómala en óptica. Experimentalmente se supo que en ciertas sustancias la velocidad de propagación dependía sobremanera de la frecuencia alrededor de cierta frecuencia llamada crítica. Por debajo de esta frecuencia la velocidad disminuía cuando la frecuencia se acerca a ella, llegando rápidamente a cero cuando se llega a la frecuencia crítica. Sobre la frecuencia crítica la velocidad de fase es mayor que la velocidad de la luz en el material considerado, aproximándose a este valor para las frecuencias más altas. Por otra parte, a la frecuencia crítica tenemos una gran absorción de la luz. Sellmeier explicó el fenómeno como que cierto elemento en el medio resonaba a la frecuencia crítica. Para obtener sus ecuaciones, era lógico que él usara un modelo mecánico, en el cual los elementos de resonancia estaban separados por distancias iguales, y excitados por ondas que se propagaban gracias a la masa y elasticidad de la substancia.

II.—PRINCIPIOS GENERALES

Como se dijo, es muy común el empleo de analogías hidráulicas para dar a entender a los principiantes ciertas leyes o definiciones en electricidad elemental. Aquí, precisamente, lo que deseamos hacer es todo lo contrario, es decir, emplearemos esas analogías y comparaciones para aclarar problemas hidráulicos, mecánicos, acústicos, térmicos y económicos, no por el puro gusto de complicar las cosas ni para poder decir que saber electricidad es lo más útil de todo, sino porque, como se verá luego, el método de analogía propuesto tiene marcadas ventajas, y, además, nos ofrece la oportunidad de aprovechar de golpe todos los conocimientos y estudios que se han hecho sobre teoría de circuitos eléctricos.

Esta analogía de la cual venimos hablando es aquella que nace directamente de la similitud entre estas dos ecuaciones lineales:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \quad (1)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \frac{X}{K} = F \quad (2)$$

Ecuaciones que se refieren a las figuras 1a y 1b, respectivamente.

De aquí decimos que el equivalente del problema mecánico de la figura 1a es el circuito 1b, en donde a la masa m corresponde la inductancia L ; a la compliancia K corresponde la capacidad C ; al frotamiento r corresponde la resistencia R ; al desplazamiento x corresponde la carga eléctrica Q ; a la corriente $\frac{dQ}{dt} = i$ corresponde la velocidad $\frac{dx}{dt} = v$; a la aceleración $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ corresponde la variación de corriente $\frac{di}{dt}$; y a la fuerza mecánica F corresponde la fuerza electromotriz E .

Esta representación que nace de la analogía de las ecuaciones (1) y (2) no es evidente la única, ya que pudimos haber escrito:

$$C \frac{dE}{dt} + \frac{E}{R} + \frac{1}{L} \int E dt = I \quad (3)$$

$$m \frac{dv}{dt} + rv + \frac{1}{K} \int v dt = F \quad (4)$$

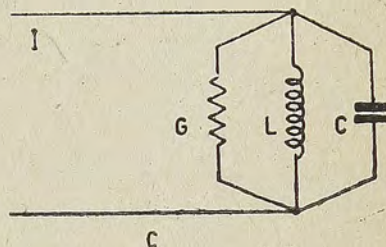
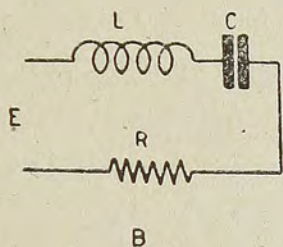
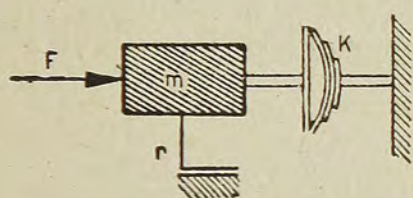


FIG. 1

De donde podríamos haber dicho que el circuito de la figura 1c, es el equivalente al de la figura 1a, en donde a la masa m corresponde la Capacidad C ; a la compliancia K corresponde la inductancia L ; al frotamiento r corresponde la conductancia $\frac{1}{R}$ al desplazamiento x corresponde el flujo $\int E dt$; a la velocidad $\frac{dx}{dt}$ corresponde el voltaje E ; a la fuerza F la corriente I .

Tenemos entonces dos sistemas de equivalentes, ambos igualmente lógicos. Al primero, debido a su antigüedad se le llama directo y al segundo, por la razón contraria, se le llama indirecto. Estrictamente hablando, ambos tendrían el derecho por igual de llamarse directo.

Al sistema directo se le llama también electrostático, debido a que cuando hay acoplamiento electromecánico-electrostático, como en el caso de un micrófono a condensador, la corriente de desplazamiento es proporcional a la velocidad con que cambia el campo de acoplamiento, es decir, a la velocidad,

Al sistema indirecto se le llama también electromagnético, debido a que cuando hay un acoplamiento electromecánico-electromagnético, como en el caso de un micrófono magnético, tenemos:

$$e = Blv \quad (5)$$

$$f = Bli \quad (6)$$

en donde la equivalencia entre «e» y «v» y «f» e «i» es forzosa y no podemos en este caso usar el sistema electrostático de equivalencia, ya que en el sistema electrostático a «e» corresponde «f y»; según (5) a «e» corresponde «v», y estas dos equivalencias debieran producirse simultáneamente, lo que es incompatible. Otro tanto nos pasaba en el caso de acoplamiento electromecánico-electrostático, como en el caso de micrófono a condensador o como en el caso de los cristales piezoeléctricos, en cuyos casos no podemos usar la analogía indirecta.

Evidentemente, en todas estas analogías suponemos que los resortes siguen la ley de Hooke y que todas las resistencias mecánicas (de fricción o de viscosidad) son proporcionales a la velocidad entre los dos puntos o superficies en consideración. En la mayoría de los casos esto se cumple con bastante aproximación,

El método electromagnético de representación tiene la ventaja de que el voltaje, que es una magnitud relativa, queda respresentado por la velocidad, que también es una magnitud relativa. No nos sucede así en el sistema electrostático o directo, en el cual el voltaje, que es una magnitud relativa, queda representado por la fuerza, que es una cantidad absoluta. Otro tanto nos pasa con la corriente que en el sistema electromagnético corresponde también a una magnitud absoluta: fuerza, y siendo la corriente una magnitud absoluta, corresponde en el sistema electrostático a una cantidad relativa: velocidad.

Firestone (J. App. Phys. 9, 373-1938) ha llamado movilidad de un elemento a la razón entre la velocidad y la fuerza en dicho elemento. Ha llamado también a la parte real de la movilidad la responsabilidad y a la imaginaria la excitibilidad.

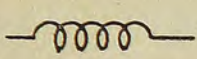
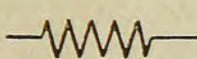
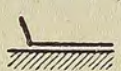
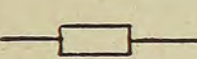
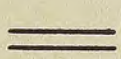
CUADRO I.—ANALOGIAS

Analogía Electrostatica	Sistema Mecánico	Analogía Electromagnética
Voltaje = e	Fuerza = f	Corriente = i
$e = L \frac{di}{dt}$	$f = m \frac{dv}{dt}$	$i = C \frac{de}{dt}$
$e = \frac{1}{C} \int idt$	$f = \frac{1}{K} \int vdt$	$i = \frac{1}{L} \int edt$
Energía		
cinética = $\frac{1}{2} L i^2$	$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} C e^2$
Energía		
potencial $\frac{1}{2C} \left[\int idt \right]^2$	$\frac{1}{2K} \left[\int vdt \right]^2$	$\frac{1}{2L} \left[\int edt \right]^2$
Corriente = i	velocidad = v	voltaje = e
carga = $q = \int idt$	Desplazamiento = $X = \int vdt$	Flujo = $\Phi = \int edt$
Capacitancia = C	Compliance = K	Inductancia = L
Inductancia = L	Masa = m	Capacitancia = C
Resistencia = R	Resistencia viscosa = R_m	Conductancia = $\frac{1}{R}$

3.—SIMBOLOS.—En la literatura corriente sobre equivalentes electromecánicos se encuentra mucha confusión en los símbolos empleados. Aun cuando no existe ninguna norma al respecto, he preferido en esta ocasión, crear los símbolos que hacen falta, con un criterio tal, que no sólo se evita toda posibilidad de confusión, sino que además, sea posible ver más claramente los circuitos mecánicos.

En el Cuadro II tenemos los distintos símbolos empleados. Los símbolos eléctricos empleados son los Standard empleados por los ingenieros de Comunicaciones. Difieren de los empleados por la mayoría de los ingenieros electricistas de «50 ciclos».

CUADRO II

ELECTRICOS	MECANICOS
 <i>Inductancia.</i>	 <i>Masa</i>
 <i>Capacitancia.</i>	 <i>Compliance</i>
 <i>Resistencia.</i>	 <i>Frotamiento</i>
 <i>Impedancia generalizada.</i>	 <i>Conexión mecánica rígida sin frotamientos, ni masa,</i>
 <i>Conductor sin R ni C ni L.</i>	

En estos símbolos adoptados, el de masa nos da la idea de una caja llena de materias; el de compliance la idea de un paquete de resortes; y el de resistencia viscosa la idea de dos superficies que rozan. He evitado así el representar la compliance simulando un resorte helicoidal, ya que es éste el signo que usamos para la inductancia eléctrica.

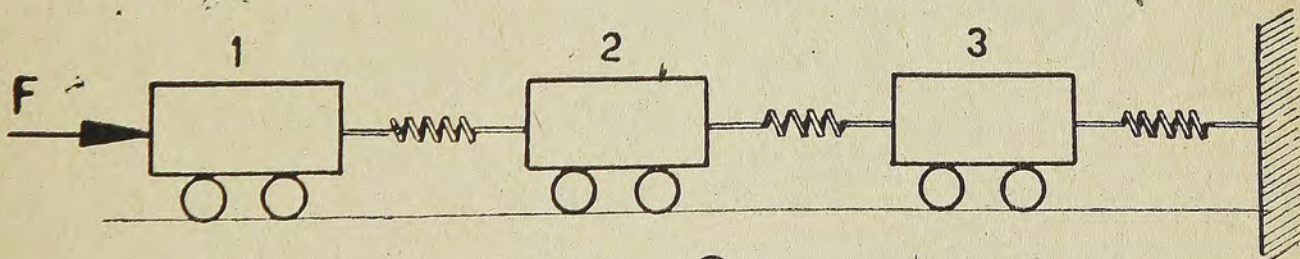


FIG. 2a.

4.—Ejemplos para aclarar la idea de los usos y de las ventajas de estas analogías:

Supongamos que tenemos tres carritos de tren unidos entre sí por resortes y el último ligado a tierra firme por otro resorte. Supongamos que aplicamos al primer carro una fuerza que es una función sinusoidal del tiempo; Figura 2a. En la

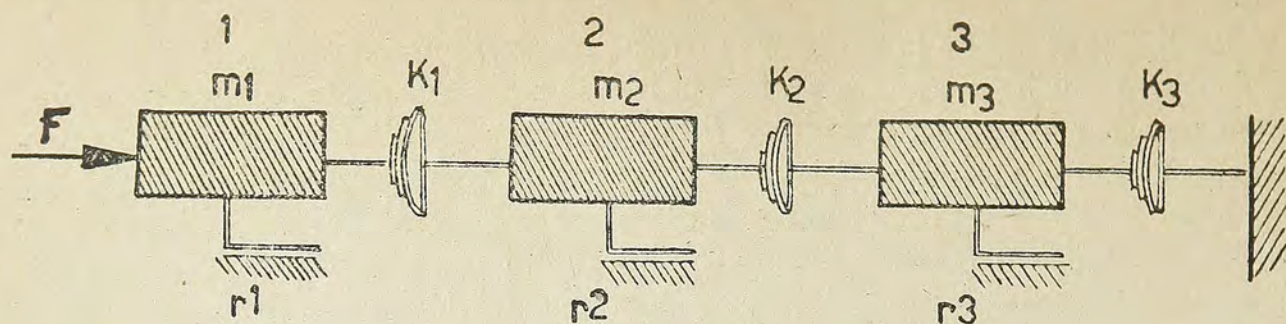


FIG 2b.

figura 2b tendremos la representación mecánica de este problema según los signos adoptados. Preguntamos ahora ¿cuál es la velocidad del carrito N.º 3? Para resolver este problema no vamos a escribir directamente las ecuaciones que nos enseña la mecánica racional sino que vamos a dibujar el carrito eléctrico equivalente, y de allí vamos a sacar todas las conclusiones que queramos, aprovechando los estudios sobre circuitos y filtros que han hecho los electricistas, y veremos con sorpresa que hemos ahorrado tiempo y que hasta podemos, a veces, experimentar en nuestro tablero con una facilidad que no habríamos encontrado, valiéndonos de la mecánica solamente:

El circuito eléctrico equivalente por representación electrostática de este pequeño problema es el dado en la Fig. 3. Pues bien, el problema queda reducido,

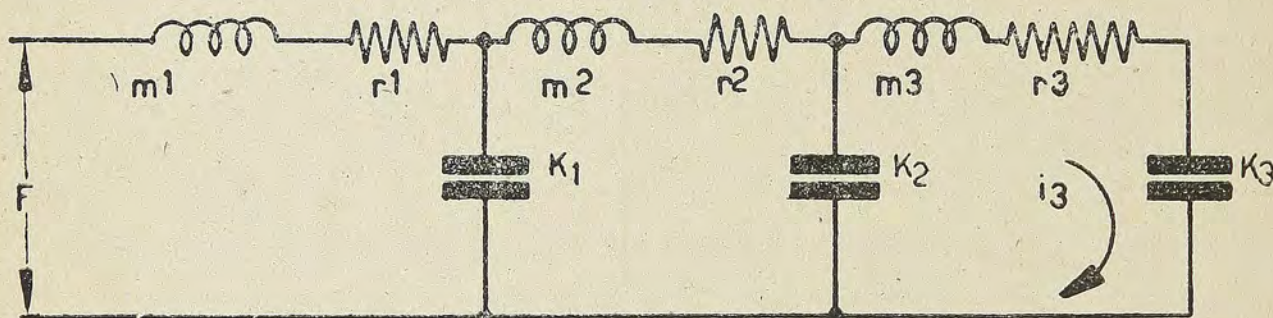


FIG. 3

entonces, a averiguar la corriente i_3 , que será proporcional a la velocidad del carrito N.º 3, que es lo que deseábamos saber. Aquí, la masa del carrito N.º 1 está representada por la inductancia m_1 ; el roce de este carro con el riel está representado por la resistencia r_1 ; la compliancia del resorte por K_1 , etc. Para averiguar esta corriente i_3 el electricista dispone de las leyes de Kirchoff, cuya aplicación en este caso es muy sencilla, y por el momento supondremos que ya tenemos resuelto el problema. Ahora bien, si la pregunta en vez de haber sido cuál era la velocidad del carrito N.º «3», hubiese sido una un poco más complicada, como por ejemplo ¿Qué frecuencia tendrá que tener la fuerza F para que la velocidad del carro N.º 2 sea máxima? En este caso la respuesta nos la da la teoría de los filtros, puesto que lo que para el mecánico es un trencito para el hombre de mentalidad «eléctrica» no es más que un filtro paso baja, y su solución completa le es a él muy conocida.

Veamos, finalmente, otro ejemplo con aspecto más útil aparentemente: Se trata de un motor que está algo descentrado y que, por lo tanto, vibra todo entero y comunica esta vibración a su fundación.

Supongamos, primeramente, que esta base de la máquina es bastante rígida y que la única parte elástica que hay en el sistema es el soporte del motor mismo. En la Fig. 4 tenemos al motor en cuestión; en la figura 4b tenemos representada mecánicamente la masa «m» del motor y la compliancia K_s del soporte. En 4c tenemos el circuito eléctrico equivalente usando el sistema electrostático de equivalencias. La Fuerza f es la fuerza no balanceada debido a la rotación de la máquina. La resistencia «r» nos representa los frotamientos interiores en la elasticidad del soporte.

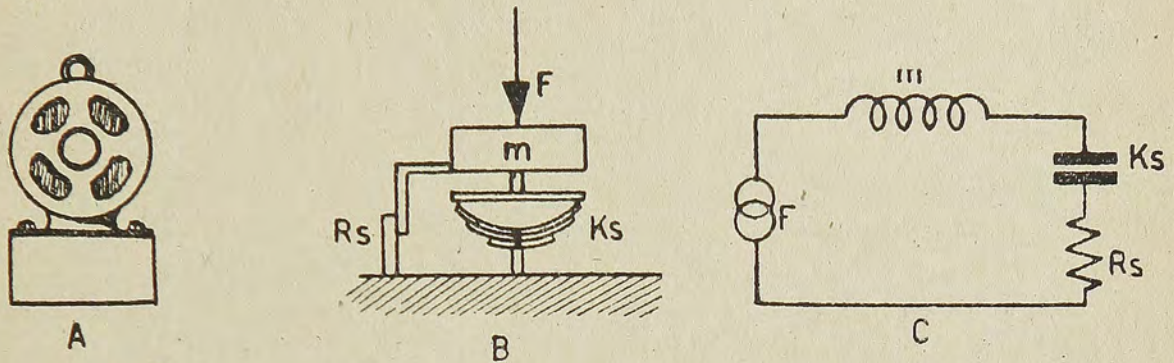
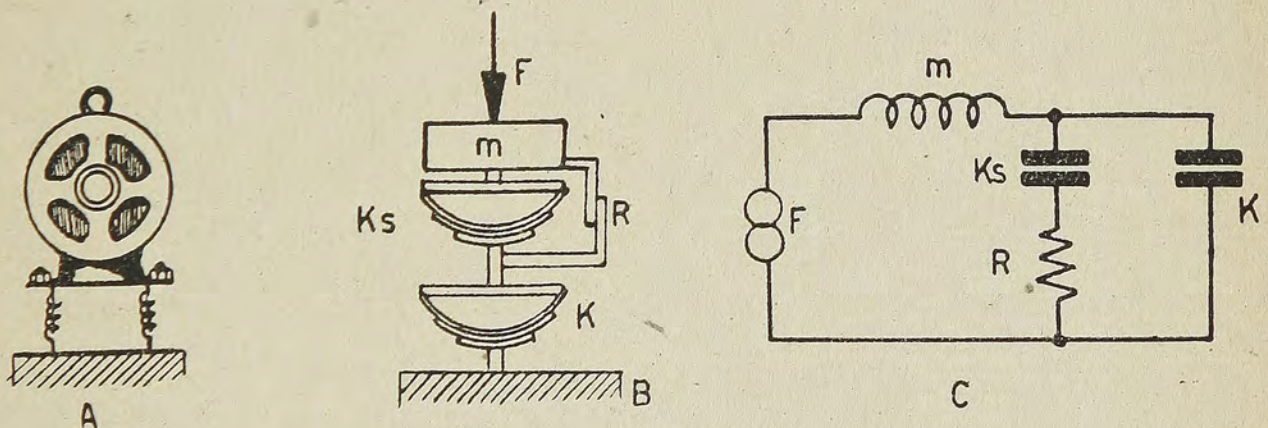


FIG. 4

En caso de que la frecuencia de resonancia de m y K_s esté próxima a la frecuencia de vibración de F , esta vibración toma una amplitud enorme y puede ser dañina a los descansos o comunica una vibración excesiva a la fundación. El remedio para este mal es muy conocido, y consiste sencillamente en montar el motor en resortes sobre su base, como en Fig. 5a.

FIG. 5



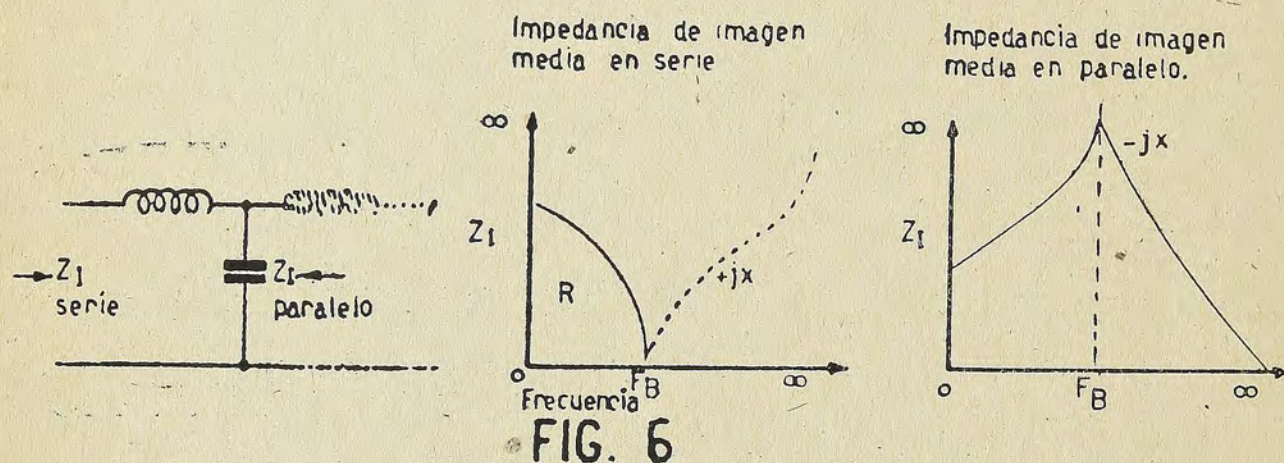
En 5b tenemos el esquema mecánico, y en Fig. 5c tenemos el circuito eléctrico equivalente.

La masa «m» y la compliancia K forman una media sección de un filtro paso baja. Es muy sabido que este tipo de filtro corta todas las frecuencias superiores a

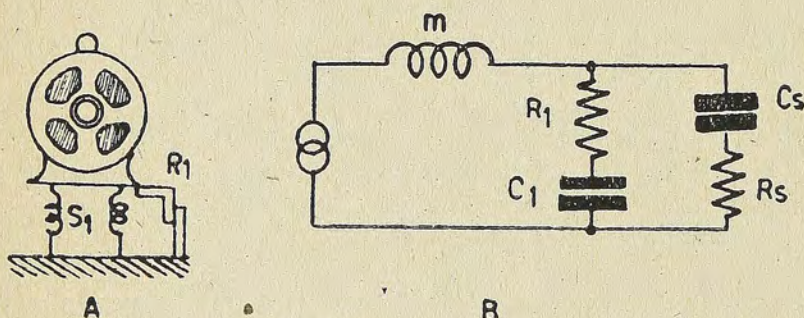
$$f_B = \frac{1}{2\pi\sqrt{MK}} \quad (7)$$

Puesto que K_s es tan pequeño que lo despreciamos.

Si la frecuencia de la vibración producida por el desbalance es superior a f_B el resultado de montar el motor sobre un soporte elástico es muy bueno, pero si es inferior no sólo no se ha ganado nada sino que a veces la vibración se transmite a todo el edificio en proporciones mayores que si no hubiésemos colocado los resortes. En efecto, si vemos el comportamiento del filtro en cuestión y sus impedancias imágenes (Véase, por ej., Terman, Radio Engineering Hand-Book), vemos que mirado del lado de la inductancia tiene cerca de la frecuencia de corte una impedancia de imagen baja, y en cambio, mirado del lado del condensador tiene una impedancia de imagen alta. Este filtro actúa entonces como un transformador ideal y se transfiere así mayor energía a la base que si no se hubiesen agregado los resortes, Véase la Fig. 6, donde tenemos estas impedancias en función de la frecuencia.



Esta mayor transferencia de energía se debe a que este transformador viene a equilibrar la impedancia del generador de vibraciones con la impedancia del suelo.



También sabremos que el método de eliminar el resultado de este efecto de transformador será agregando un amortiguador o resistencia mecánica, tal como en la Fig. 7.

En 7b tenemos el equivalente correspondiente, y vemos que si reemplazamos la combinación en serie $R_1 C_1$ por una en paralelo $R_2 C_2$, lo que siempre se puede hacer, tenemos:

$$R_1 - \frac{j}{\omega C_1} = \frac{R_2 \left(\frac{-j}{\omega C_2} \right)}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}} = \frac{\frac{R_2}{\omega^2 C_2^2} - j \frac{R_2^2}{\omega C_2}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}} \quad (8)$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2} \quad (9)$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{w^2 C_1^2} + R_1^2} \quad (10)$$

si $R_1 = \frac{1}{2w_B C_1}$ para un cierto circuito

$$C_2 = \frac{C_1}{\left(1 + \frac{w^2}{4w_B^2}\right)} \quad (11)$$

$$R_2 = \frac{1}{2w_B C_1} \left[\frac{1}{2} + \frac{4w_B^2}{w^2} \right] \quad (12)$$

La impedancia es entonces baja en ambos puntos y el efecto de transformador no existe. Para las frecuencias superiores a F_B la pérdida de atenuación debida a la resistencia agregada no es grande.

Con este ejemplo dejamos en claro de que el sistema de los equivalentes electromecánicos tiene sus ventajas, ya que todas estas conclusiones que hemos sacado de la teoría de los filtros para nuestro motor que vibra no la habíamos visto tan claras como las vemos ahora, si hubiésemos ido directamente a la mecánica. Efectivamente, he visto en más de una ocasión a un ingeniero asombrarse de que al montar una compresora sobre ciertos resortes que él tenía, se transmitió más vibración a la base que antes de colocar los resortes; la razón ya la sabemos.

En la segunda parte de este trabajo veremos algunas aplicaciones algo más complicadas e importantes:

V.—PASO DEL SISTEMA ELECTROMAGNETICO AL SISTEMA ELECTROSTATICO Y VICEVERSA

En los ejemplos anteriores hemos hecho uso sólo de la analogía electrostática, que es la más usada, pero habríamos podido usar igualmente bien para esos mismos ejemplos la analogía electrodinámica.

En el caso mecánico de la Fig. 8 veremos que el equivalente electrodinámico 8b guarda más similitud con el original en la disposición de los distintos elementos que el equivalente electrostático 8c, de allí que se prefiera a veces a aquel. Tanto al observar la figura 8 como el Cuadro I vemos que los equivalentes electromecánicos-electrostáticos y electrodinámicos son inversos entre sí. Se entiende en teoría de los circuitos eléctricos por circuitos inversos, aquellos en los cuales la impedancia de uno varía con la frecuencia, del mismo modo que varía en la frecuencia la admitancia del otro. Muchas veces, en vez de la palabra inverso se usa la palabra recíproco o dual indistintamente. Sin embargo, hay muchos autores que prefieren usar la palabra recíproco para aquellos circuitos en que la impedancia de uno es el recíproco de la impedancia del otro, multiplicado por una constante que puede ser diferente de uno. Llamen, en seguida, circuitos duales a aquellos en los cuales si en las ecuaciones referentes a uno se reemplaza E por I , R por G y L por C , y viceversa, obtengo las ecuaciones del otro. Tenemos, entonces, que las definiciones de circuitos inversos y recíprocos y duales serán idénticos y definen una misma cosa, y en este trabajo los usaremos en este sentido.

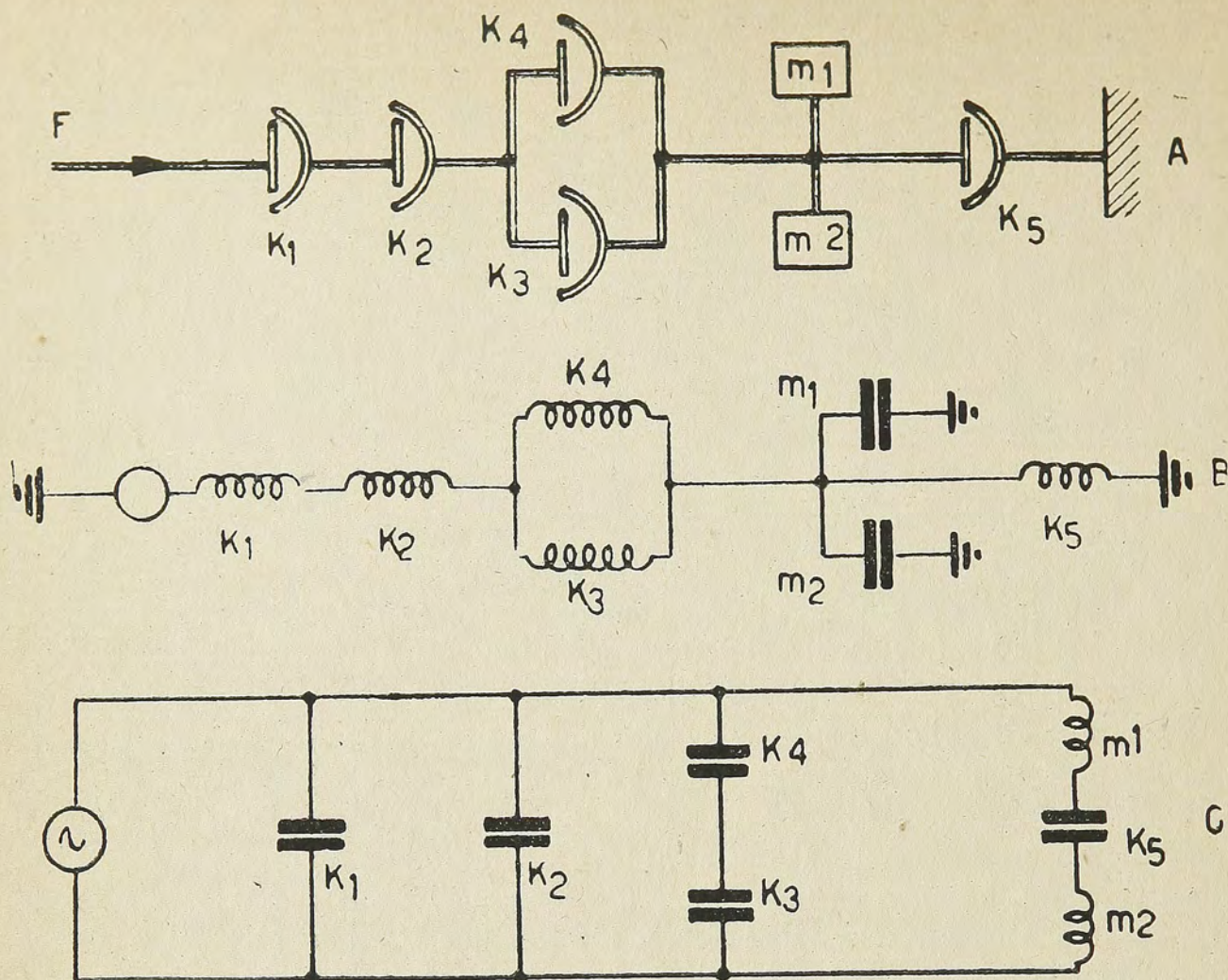


FIGURA 8

De que nosotros usemos aquí estas tres palabras con el mismo significado no quiere decir que siempre se le use así, especialmente por los ingenieros de comunicaciones, los cuales suelen decir que la «representación dual» de 9a es 9b. No es, pues, entonces de esta representación de la que hablamos aquí. Tenemos, entonces, que para un mismo caso mecánico sus representaciones electromagnética

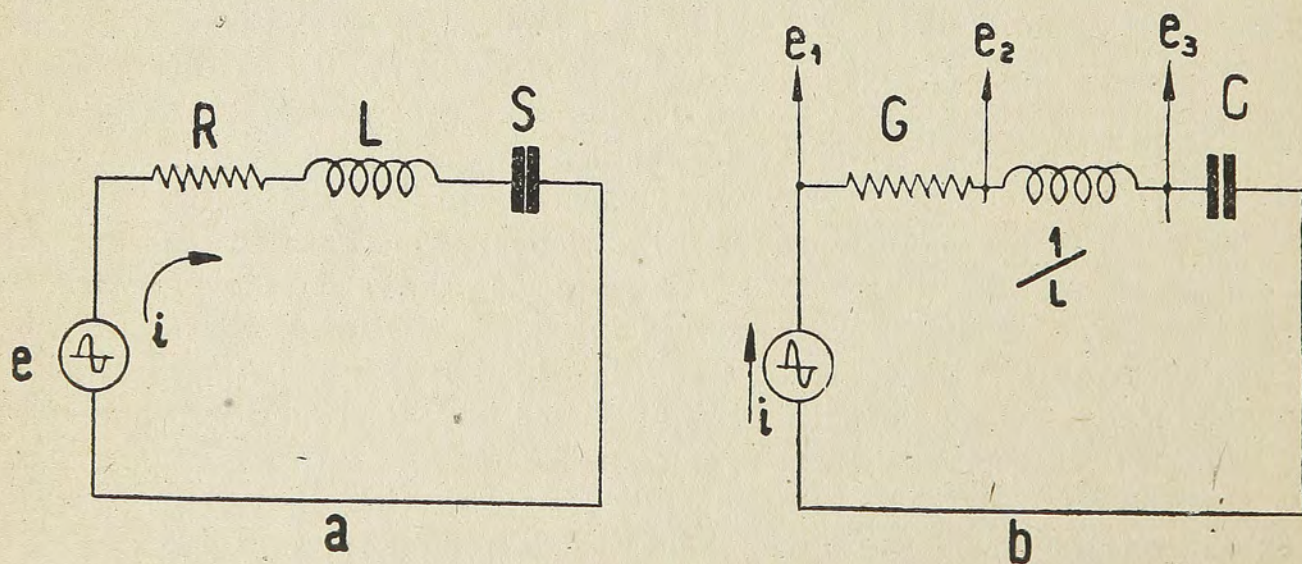


FIG. 9

y electrostática son duales entre sí. Sucede en la mayoría de los casos que el problema mecánico en consideración admite ambos tipos de representación, y es muy útil obtener ambos para comprobarse uno mismo de que no ha cometido errores. Una vez obtenidas estas dos representaciones debe verse de que son duales entre sí. Si lo son, es muy posible que no nos hayamos equivocado cuando buscamos nuestro equivalente. A no ser que hayamos cometido en uno un error y en el otro el error inverso, lo que es poco probable. Si no son duales, quiere decir que hemos cometido algún error.

En todo circuito eléctrico se puede aplicar las leyes de Kirchhoff. Pero, si aceptamos la definición de dualidad dada más arriba, vemos que las leyes de nudos y mallas son duales entre sí, puesto que una se obtiene de la otra, reemplazamos e por i:

$$\sum i = 0 \quad (13)$$

$$\sum e = 0 \quad (14)$$

Por lo tanto, donde hay una malla en un circuito debe haber un nudo en su dual y viceversa; en donde hay un nudo en un circuito debe haber una malla en su dual. Esto no siempre es posible, de donde hay circuitos que no tienen dual y, por lo tanto, casos mecánicos que admiten sólo un tipo de representación eléctrica. Para poder demostrar esto último, comencemos por estudiar un poco la topología de los circuitos eléctricos.

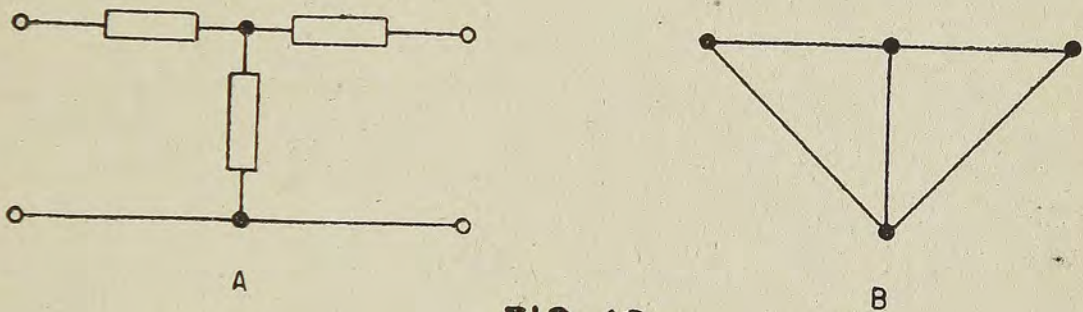


FIG. 10

Cuando tenemos un circuito como el de la Fig. 10a, que es un circuito de cuatro terminales (a veces llamado de tres terminales), tenemos uno de cuatro nudos y cinco ramas. Esta configuración la dibujamos como en 10b. Debido a que consideramos a los pares de terminales como ramas y todas las corrientes circulan dentro de la configuración. No consideraremos, entonces, circuitos que consisten de dos partes conectadas por un solo camino, puesto que por allí no circulará corriente y, por lo tanto, pueden considerarse como dos circuitos independientes.

En la Fig. 11 tenemos todas las figuras posibles con un número «n» de ramas, hasta $n = 7$. Con dos ramas es solo posible una configuración. Se ve por otra parte que las dos configuraciones con tres ramas se obtienen reemplazando una rama de la configuración de dos ramas por ramas en serie o en paralelo. Las configuraciones de cuatro ramas se obtienen por igual proceso de las configuraciones de tres ramas, y así sucesivamente. En el caso de seis ramas aparece una configuración que no puede ser deducida por este procedimiento; no hay en ella ni ramas en serie ni ramas en paralelo. Las configuraciones de siete ramas pueden deducirse de las de seis por reemplazo de ramas en serie y en paralelo. Como el número de configuraciones con más de siete ramas es muy grande no las incluyo en la Fig. 11, pero en la Fig. 12 tenemos hasta $n = 11$ las figuras que no pueden deducirse en las anteriores.

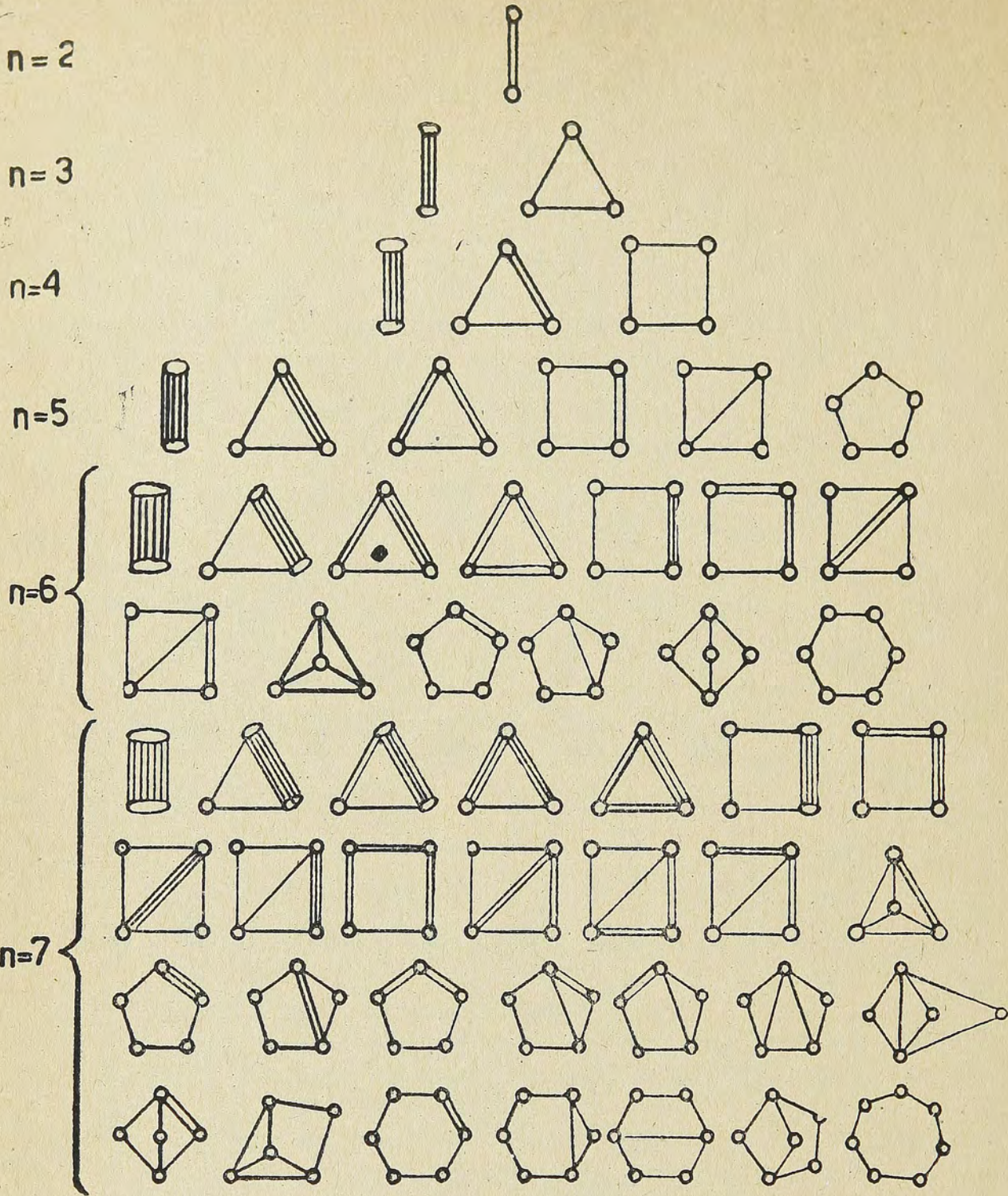


Fig 11.

En una configuración que no contiene ramas en serie ni en paralelo tenemos a lo menos tres ramas que van a cada nudo. Sea «m» el número de nudos, 3m sería el número mínimo de ramas contado dos veces, luego:

$$n \geq \frac{3m}{2} \tag{15}$$

En una configuración que no contiene ramas en paralelo no puede haber más ramas que en el caso de que cada nudo esté conectado a cada uno de los otros por

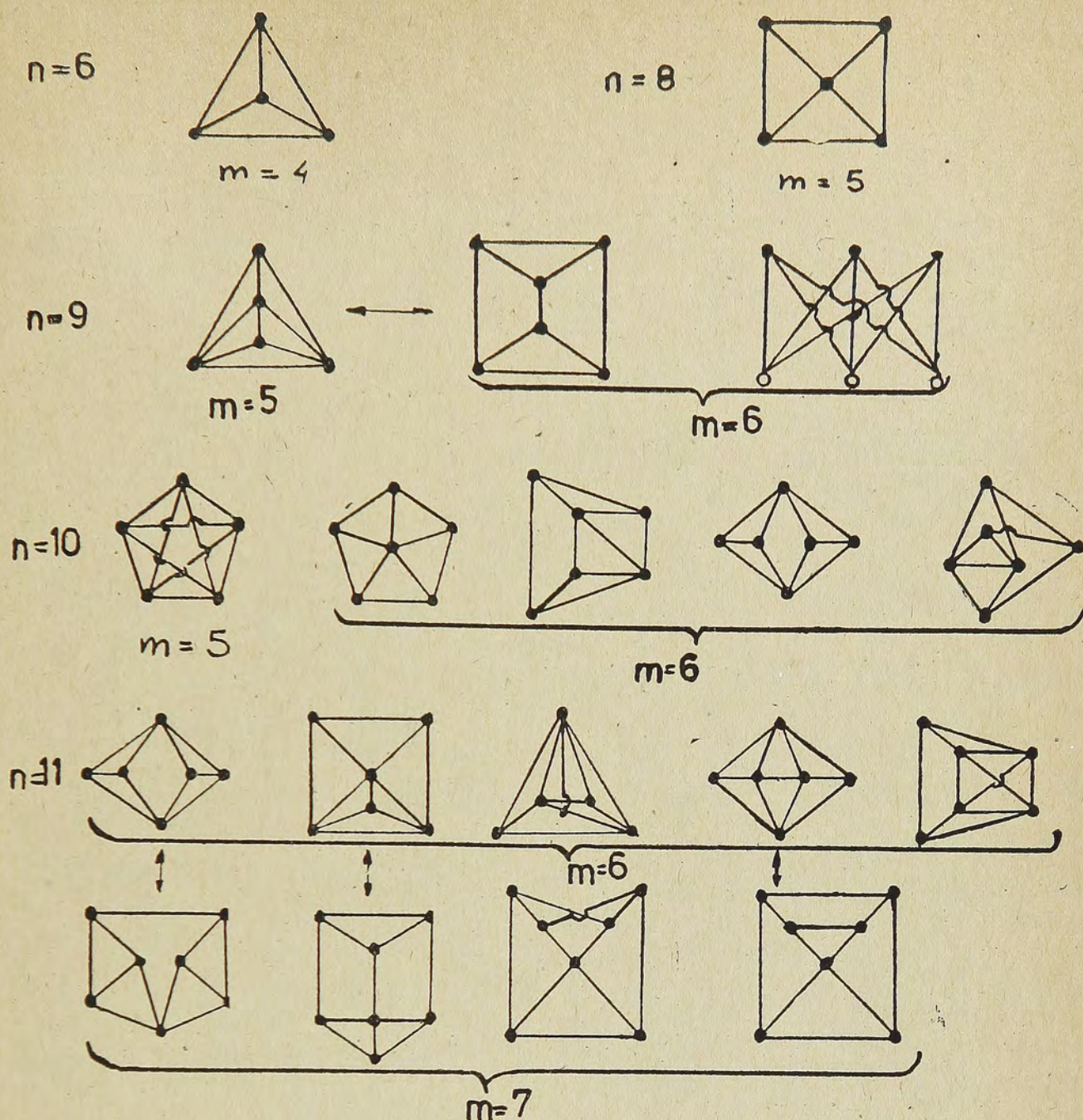


Fig. 12

intemedio de una rama. Entonces, en cada nudo tendremos $(m-1)$ ramas, y como hay « m » nudos tendremos $m(m-1)$ ramas contadas cada una dos veces, luego:

$$m \geq \frac{m(m-1)}{2} \quad (16)$$

luego, reemplazando en 15:

$$\begin{aligned} m(m-1) &\geq 3m \\ m &\geq 4 \\ n &\geq 6 \end{aligned}$$

Efectivamente, fué con seis ramas cuando observamos un caso que no pudo ser derivado de otro caso anterior.

Para el caso $n = 9$ $m = 6$ y para el caso $n=10$ $m=5$ vemos que estas figuras no pueden dibujarse en un plano o sobre una esfera sin que haya ramas que se crucen. En otras palabras, estas ramas no pueden considerarse, como en los otros casos, como aristas de poliedros. Estas dos figuras no coplanares las reproducimos en la Fig. 13.

Es evidente entonces que un circuito eléctrico que se representa por una configuración no coplanar no tiene dual, puesto que no vamos a poder hacer que a cada nudo corresponda una malla y viceversa, como lo hacemos con toda facilidad en los circuitos indicados más adelante (1).

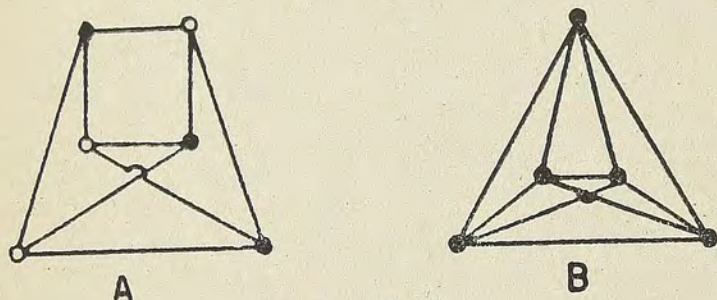


FIG. 13

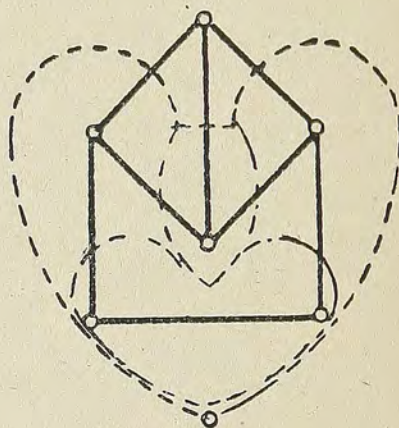


FIG. 14

Cuando un circuito es coplanar tiene dual y puede encontrarse fácilmente yendo nuevamente a la topología del problema. El método es el siguiente: Cada nudo del circuito original hay que rodearlo con una malla del nuevo circuito, y dentro de cada malla del circuito original hay que colocar un nudo del nuevo circuito. Incluyendo, evidentemente a la malla externa. En la Fig. 14 tenemos, en líneas llenas un determinado circuito eléctrico. Con líneas de puntos tenemos el dual de aquel encontrado por este método, es decir, colocando un nudo dentro de cada malla:

Aquí vemos que todas las ramas del circuito original se cortan con ramas del nuevo circuito. En la Fig. 15 tenemos otro ejemplo. Aquí, cada vez que cortamos una inductancia la reemplazamos por una capacitancia; cada vez que cortamos una resistencia la reemplazamos por una conductancia; cada vez que cortamos un generador de voltaje lo reemplazamos por generador de corriente y viceversa.

En la Fig. 15b tenemos el dual dibujado en forma ordenada.

Igual procedimiento hubiéramos podido emplear en el caso de la Fig. 8 y pasar directamente del caso b al c:

Como el lector ya podrá ir viendo, esto de tener una manera fácil de encontrar los circuitos duales tiene una importancia enorme para nuestro estudio de los equivalentes electromecánicos. Finalmente, si un problema mecánico conduce a un circuito no coplanar empleando cierto sistema de analogías, no hay que perder el

(1) Habría una manera indirecta de encontrar el recíproco, pero no nos va a ser útil para nuestro caso.

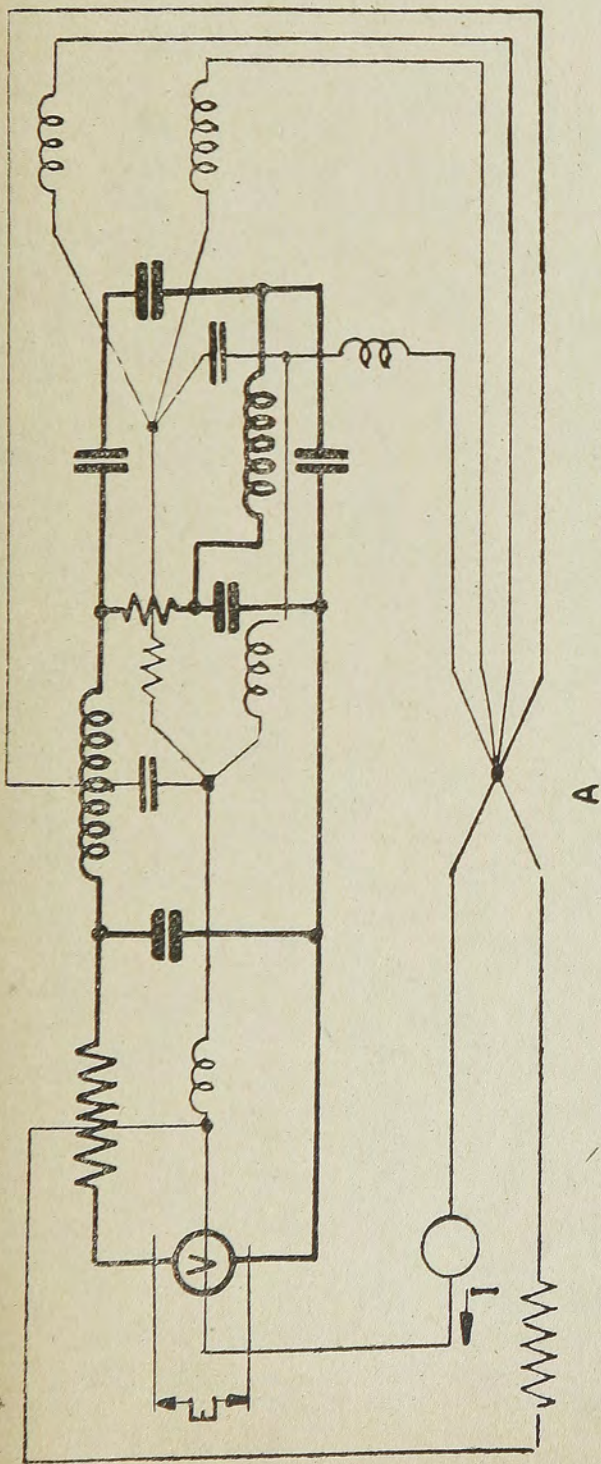


FIGURA 15

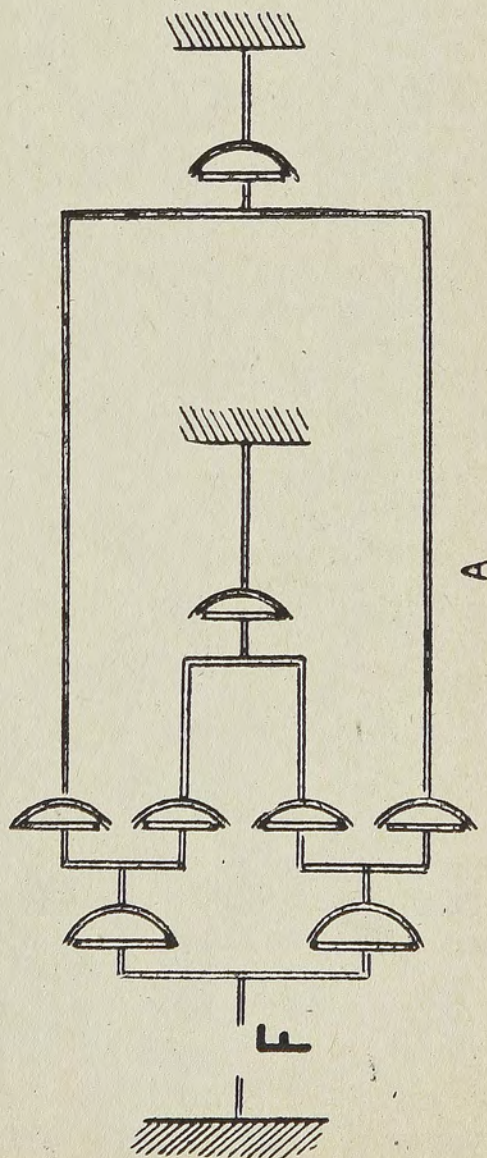
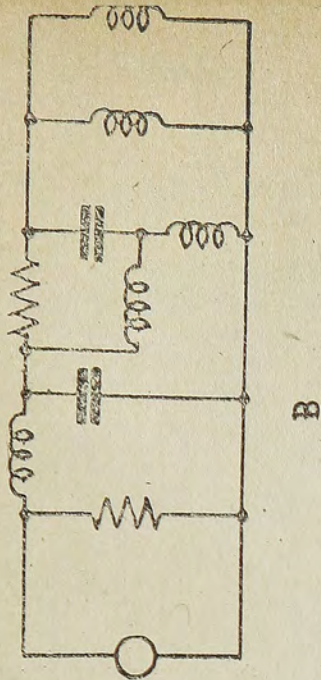


FIGURA 16

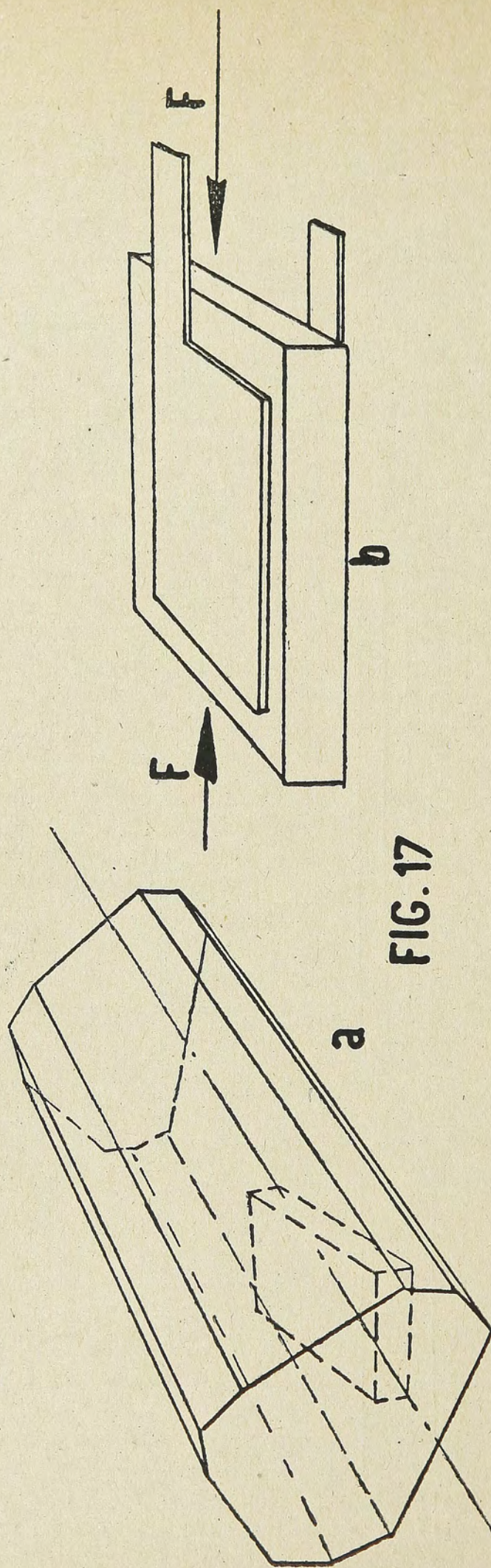


FIG. 17

tiempo tratando de resolverlo empleando el otro sistema de analogías, ya que esto equivaldría a buscarle el dual a un circuito no coplanar. Sea el ejemplo mecánico de la Fig. 16a. Su analogía electromecánica, usando el sistema electromagnético sería el de la Fig. 16b. Però, esta configuración ya la conocemos y sabemos que no es coplanar. Luego, el caso mecánico de la Fig. 16a no tiene representación electrostática directa, sin el empleo de transformadores o de elementos negativos.

VI.—INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Así como en electrotecnia, disponemos de una serie de instrumentos para medir las diferentes magnitudes: amperímetros, voltímetros, puentes, etc., así también nosotros tendremos instrumentos para medir nuestro circuito mecánico.

La medida de fuerzas y momentos estáticos no ofrece, en general, ninguna dificultad, y no la citaremos, por lo tanto, aquí en donde estamos preocupados de los problemas dinámicos. La medida de las fuerzas dinámicas las hacemos mediante un dispositivo que prácticamente no introduce deformaciones extras. Este dispositivo consiste en una cristal piezo-eléctrico de tartrato de sodio y potasio cortado bajo un ángulo especial. Cuando los esfuerzos dinámicos a medir son grandes se emplean o cristales de cuarzo o un sistema de unos alambritos de una aleación especial. Como este último procedimiento ha tomado una importancia enorme últimamente en el estudio de los esfuerzos dinámicos en puentes, grúas y otras estructuras después que han sido construídos, le dedicaremos más tarde un trabajo completo. Por el momento sólo fijaremos nuestra atención en algunos de los instrumentos para usar dentro del laboratorio.

Decíamos, que para medir fuerzas variables en el tiempo usábamos el fenómeno piezo-eléctrico. Este es un fenómeno derivado de la simetría en ciertos cristales, por el cual cada vez que comprimimos el cristal en cierta dirección aparecen en ciertas caras de él unas cargas que son una función lineal de la fuerza aplicada.

Efectivamente, si de un cristal de sal de Seignette ($\text{COOK-CHOH-CHOH-COONa} + 5\text{H}_2\text{O}$), como el indicado en la Fig. 17a, cortamos una placa como la indicada con líneas de puntos en esta misma figura; y, si luego aplicamos a esta placa un par de electrodos, como en la Fig. 17b, cada vez que apliquemos una fuerza como la indicada en esta última figura, aparecerá entre las placas del cristal un voltaje proporcional a esta fuerza.

Escogiendo debidamente las dimensiones del cristal es posible hacer las deformaciones despreciables para la mayoría de los casos. Para medir las fuerzas será necesario, entonces, amplificar el voltaje producido por el cristal y luego llevarlo a cualquier tipo adecuado de miliamperímetro o a la pantalla de un osciloscopio. El amplificador empleado puede ser cualquiera que sea adecuado para amplificar el rango de frecuencias que se va a usar y que tenga unos 25 o más

decibels de realimentación negativa para asegurar su estabilidad y linealidad. Por otra parte, cómo la constante dieléctrica de estos cristales varía enor-

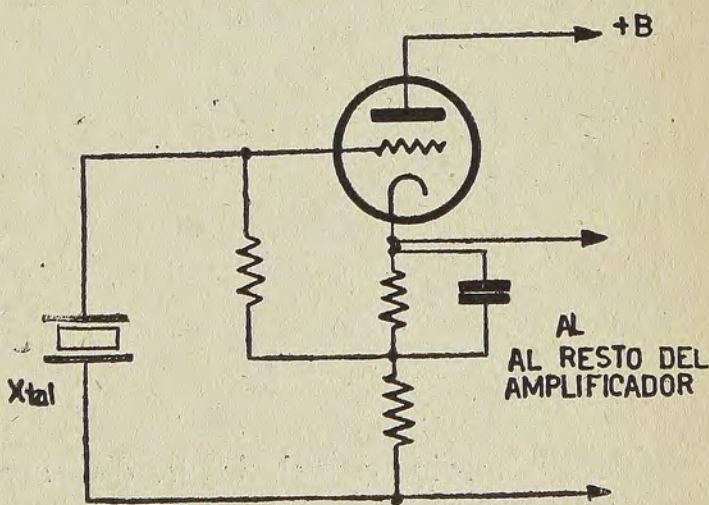


FIG. 18

mamente con la temperatura, es necesario que la admitancia de entrada del amplificador sea lo más baja posible. Para esto debe colocarse el amplificador lo más cerca posible del cristal y emplear como primera etapa amplificadora un circuito cargado por el cátodo, como en la fig. 18.

En la figura 19 tenemos, entonces, un esquema completo del método para ver las fuerzas dinámicas en un punto dado de un sistema mecánico, en el cual hemos intercalado un cristal piezo-eléctrico en el punto en cuestión. La deformación de un cristal debidamente diseñado es despreciable y puede considerarse como un punto rígido. Repito nuevamente que este es un sistema de laboratorio en donde se puede intercalar el cristal. Para hacer medidas de fatigas en estructuras grandes, en donde no es posible intercalar ningún instrumento de medida, disponemos de otro método, que veremos más adelante.

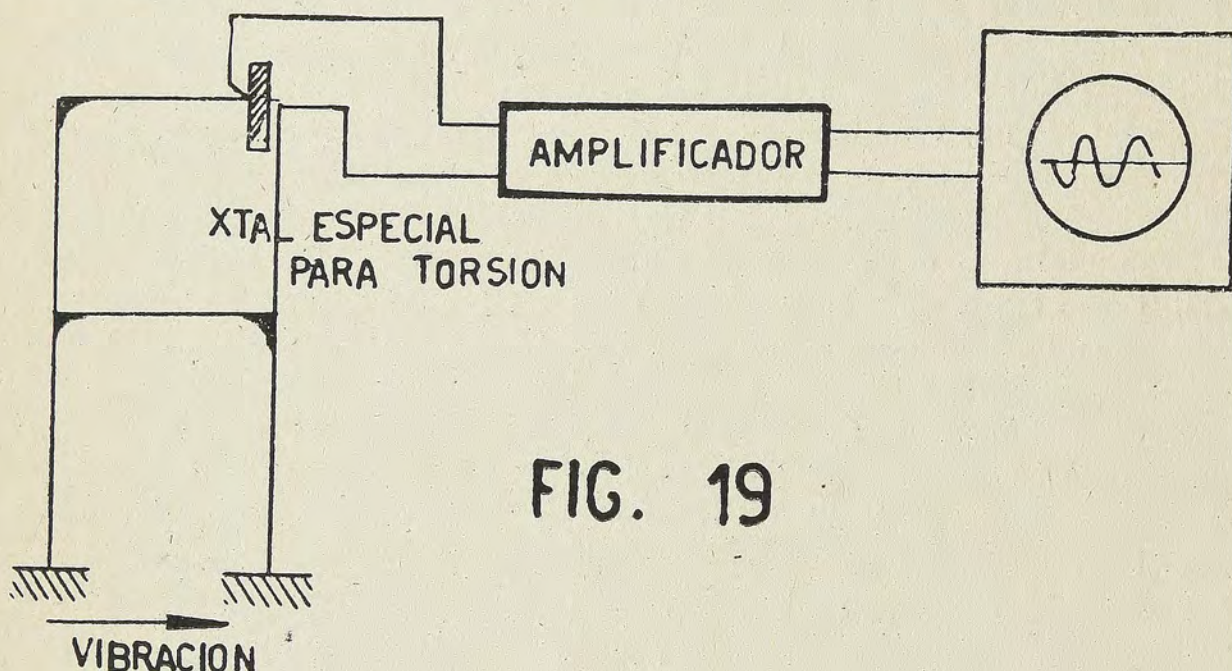


FIG. 19

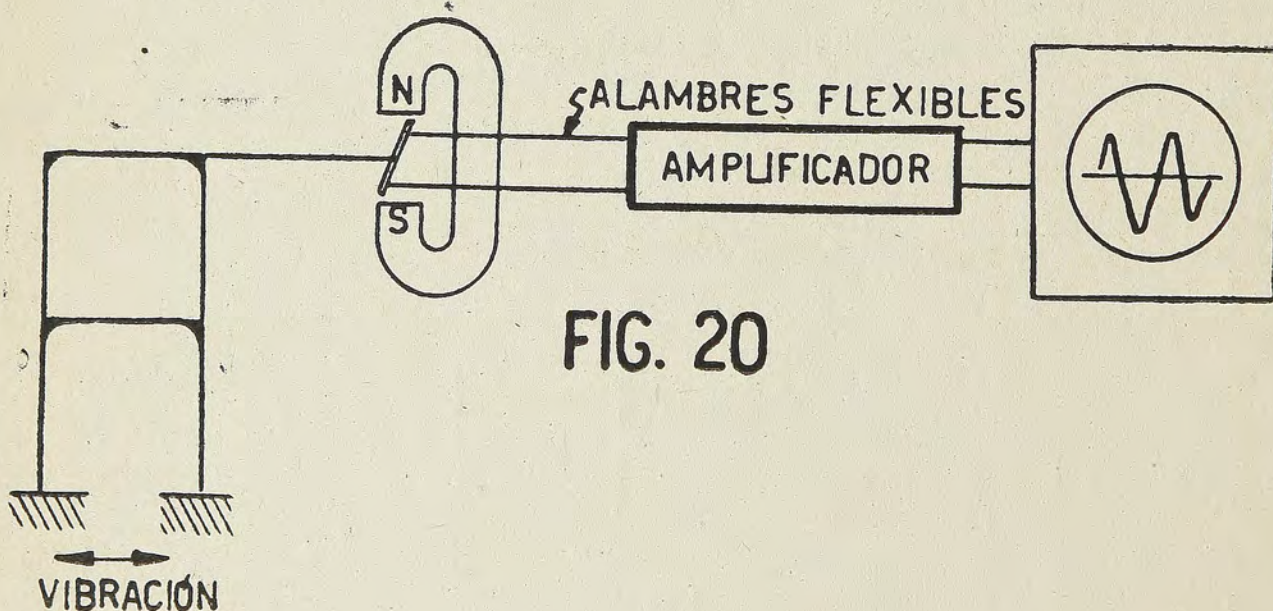


FIG. 20

Para la medida de velocidades disponemos de un método igualmente sencillo. Usamos en él un conductor que se mueve con la velocidad que deseamos medir y un campo magnético fijo. El conductor en cuestión corta al moverse las líneas magnéticas del imán. La fuerza electro-motriz generada en el conductor vale:

$$e = v l B$$

de donde su proporcionalidad a la velocidad a medir. Este voltaje se lleva mediante un par de alambres flexibles a un amplificador, luego a la pantalla de un osciloscopio, como en la Fig. 20.

El concepto de impedancia mecánica que se dió más atrás tiene una importancia enorme, y por eso se ha diseñado un instrumento especial para hacer esta medida.

Muchos han sido los sistemas empleados para la medida de las impedancias mecánicas. Algunas miden la fuerza y la velocidad, y luego hacen la división de estos complejos para obtener la impedancia mecánica. Otros emplean un circuito puente, tal como lo haríamos en electricidad para la medida de impedancias eléctricas.

El instrumento que se describe a continuación es el empleado por Wiggins de los Laboratorios RCA en Princeton, New Jersey:

Cuando una barra está empotrada en un extremo y libre en el otro y se le mueve en el extremo empotrado, el desplazamiento (lateral evidentemente) del extremo libre respecto a su posición neutra, será proporcional a la fuerza aplicada y a la compliancia de la barra. La fuerza ejercida sobre la barra será el producto de la masa efectiva por la aceleración. La masa efectiva de una barra empotrada en un extremo es igual a la cuarta parte de la masa total. La compliancia de esta barra vale:

$$X_c = \frac{4L^3}{Eba^3} \quad (17)$$

en donde L es el largo de la barra, E es el módulo de Young, b es el ancho y a es el espesor de la barra.

En el instrumento en cuestión se colocan dos barras solicitadas por la misma fuerza (Fig. 21). Estas se mueven por la acción de una corriente alterna de la fre-

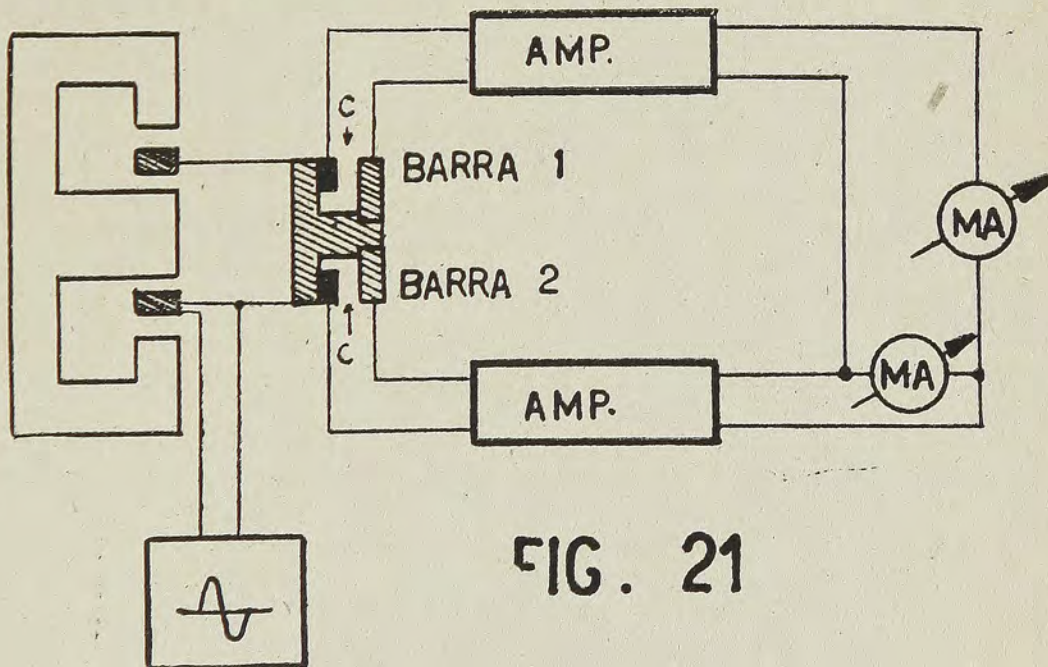


FIG. 21

cuencia a la cual se desea medir, que circula por una bobina que se encuentra en un intenso campo magnético, tal como en un altoparlante electrodinámico corriente. Estas barras mecánicas forman parte de unos condensadores cuyos otros electrodos son firmes, como está indicado en la figura. Estos condensadores actúan como micrófonos a condensador y sus salidas eléctricas se amplifican de la manera habitual en radiotelefonía.

El desplazamiento relativo de las extremidades de las dos barras es cero si estas dos barras son idénticas. Pero, si una de ellas se carga con una impedancia mecánica cualquiera en su extremo libre este desplazamiento relativo no será más cero sino que será una función de la fuerza aplicada, de la masa y compliancia de las barras y de la impedancia mecánica aplicada como carga.

Como las compliancias de las dos barras es la misma, la razón de las dos fuerzas es igual a la razón de las salidas de los dos amplificadores. Las salidas de los dos amplificadores se mezclan en 180° fuera de fase, de manera que cuando las barras se mueven sin carga mecánica aplicada, las dos señales se cancelan. Si luego aplicamos una carga mecánica a una de las barras la mezcla de las dos señales será proporcional a la diferencia vectorial entre la fuerza en la barra cargada y la fuerza en la barra no cargada.

La impedancia mecánica aplicada a la barra cargada será en ohms mecánicos proporcional a la razón entre la señal mezclada y la señal de la barra no cargada solamente.

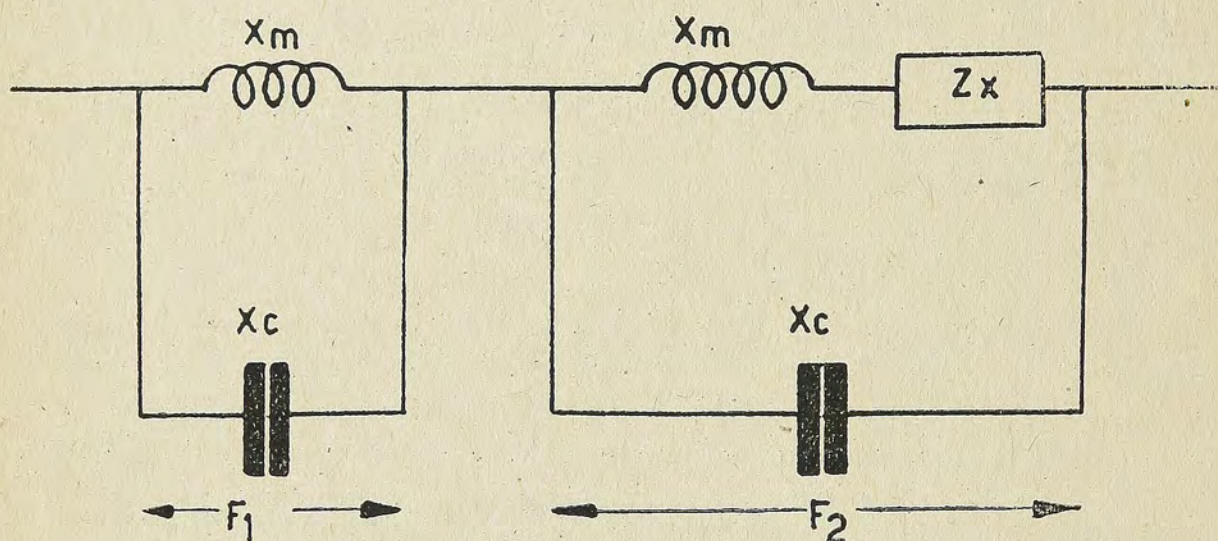


FIG. 22

En la figura 22 tenemos el circuito eléctrico equivalente. X_m es la masa de cualquiera barra, X_c es la compliancia de las mismas, Z_x es la impedancia por medir y que se aplica en el extremo libre de una de las barras. Llamaremos Z_1 la impedancia equivalente de la masa de la barra y su compliancia y Z_2 la impedancia equivalente de la masa de la barra en serie con la impedancia desconocida, y todo en paralelo con la compliancia de la barra. F_1 será la fuerza en la barra no cargada y F_2 será la fuerza en la barra cargada.

Tendremos así:

$$Z_1 = \frac{X_m X_c}{X_c + X_m}$$

$$Z_2 = \frac{(X_m + Z_x) X_c}{X_c + X_m + Z_x}$$

$$Z_2 - Z_1 = \frac{(X_m - Z_x) X_c}{X_c + X_m + Z_x} - \frac{X_m X_c}{X_c + X_m}$$

$$= \frac{Z_x X_c^2}{X_c^2 + 2X_c X_m + X_m^2 + Z_x X_c + Z_x X_m}$$

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = \frac{Z_x X_c^2 (X_c + X_m)}{(X_c^2 + 2X_c X_m + X_m^2 + Z_x X_c + Z_x X_m) X_m X_c}$$

$$= \frac{X_c Z_x}{X_m^2 + X_c X_m + Z_x X_m}$$

$$Z_x \left[1 - \frac{(Z_2 - Z_1) X_m}{Z_1 X_c} \right] = \frac{(Z_2 - Z_1) X_m}{Z_1} + \frac{(Z_2 - Z_1) X_m^2}{Z_1 X_c}$$

$$\text{SI } \frac{(Z_2 - Z_1) X_m}{Z_1 \cdot X_c} \ll 1$$

Lo que es perfectamente cierto cuando estamos muy por debajo de la frecuencia de resonancia de la barra

$$Z_x = \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_1} \left[X_m + \frac{X_m^2}{X_c} \right]$$

Como X_m está a 180° con $\frac{X_m}{X_c}$, tomando únicamente los valores numéricos

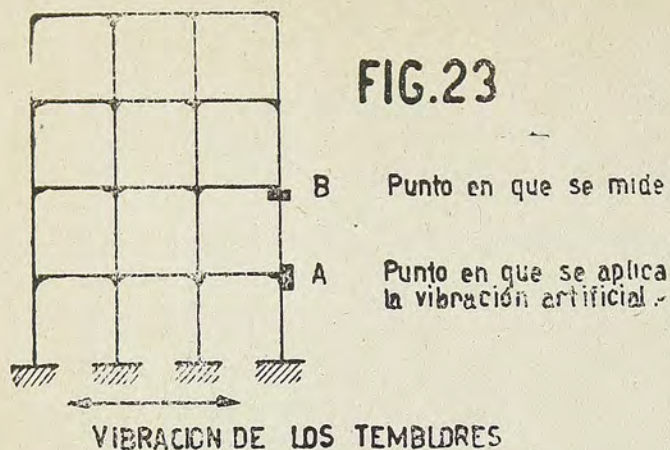
$$Z_x = \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z} \left[X_m - \frac{X_m^2}{X_c} \right]$$

$$\text{pero, como } \frac{F_2}{F_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$|Z_x| = \frac{F_2 - F_1}{F_1} \left[X_m - \frac{X_m^2}{X_c} \right]$$

En las fotografías adjuntas vemos la realización práctica de este instrumento. Las dos barras se hacen de una sola pieza y son de bronce para frecuencias inferiores a 500 ciclos; para frecuencias superiores se hacen de aluminio. Con los instrumentos indicados se puede medir la salida de cada barra o de la combinación de las dos en oposición. La energía necesaria para mover todo este mecanismo puede llegar a 25 Watts para las frecuencias altas. En una de estas fotografías se ve un pick-up corriente, cuya aguja se apoya en la barra superior para medirle la impedancia mecánica a distintas frecuencias. El instrumento en cuestión fué construído para operar en frecuencias comprendidas entre 30 y 10,000 ciclos por segundo. Evidentemente, este mismo principio puede emplearse debidamente en cualquier rango de frecuencias, siempre que se hagan las modificaciones del caso

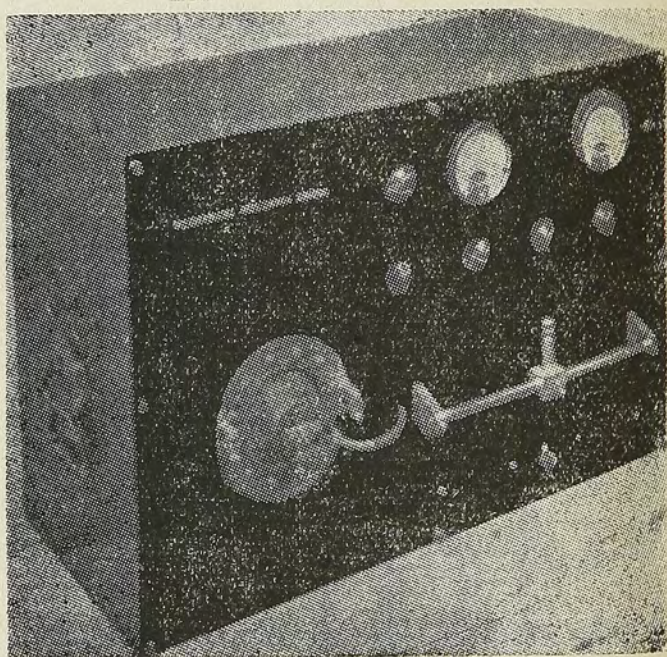
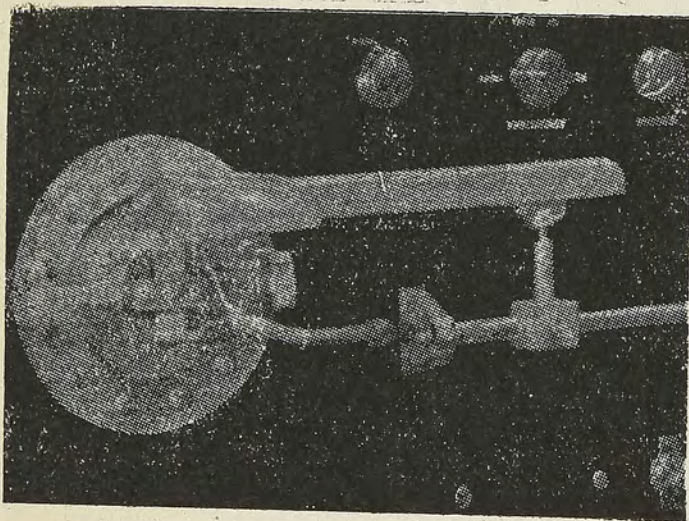
Actualmente el autor se encuentra desarrollando y construyendo un instrumento destinado a hacer medidas de períodos de resonancia e impedancias mecánicas en un edificio ya construído.



Sea la estructura de la Fig. 23.

Lo primero que se hace es reemplazar el edificio por su circuito eléctrico equivalente. Luego vemos que éste corresponde a la extensión de Cauer del teorema de las reactancias de Foster. En la tercera parte de este trabajo estudiaremos cómo es posible aplicar el teorema de Foster y un pequeño generador de temblores artificiales

microscópicos, y algunos cristales piezo-eléctricos para encontrar todos los períodos de resonancia del sistema, y, aun más, hasta medir cuánto pesa el edificio.



(Continuará)