MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

CAPÍTULO VI

ECUACIONES JENERALES DEL MOVIMIENTO I CONDICIONES DEL EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO INVARIABLE, SOMETIDO O NO A LIGAZONES.—MOMENTOS DE INERCIA.—REACCIONES DEL SÓLIDO SOBRE LAS LIGAZONES.—PÉNDULO COMPUESTO.

Cualquiera que sea el estado dinámico de un sólido invariable, las fuerzas interiores, análogas a las acciones moleculares, no trabajan; luego la fórmula jeneral de Lagrange se reduce a la siguiente

$$\Sigma \delta \ \mathfrak{T} m \gamma = \Sigma \delta \ \mathfrak{T} F$$

Esta relacion debe ser satisfecha para todos los cambios de lugar, compatibles con las ligazones del sólido. Se comprende, desde luego, que el número de las ecuaciones que determinarán el movimiento será tanto mas reducido cuanto mas reducido sea el número de los sistemas de cambios de lugar virtuales compatibles con las ligazones.

Así, por ejemplo, si las ligazones esteriores obligan al sólido a tener solo un movimiento de traslacion o un movimiento de rotacion al rededor de un eje fijo, un solo sistema de cambios de lugar virtuales será, a cada momento, compatible con las ligazones i *una sola ecuacion* bastará para determinar el movimiento del sólido; si las ligazones obligan al sólido a jirar al rededor de un punto fijo o a moverse paralelamente a un plano, habrán tres sistemas distintos i arbitrarios de cambios de lugar que serán compatibles con las ligazones; luego tambien *tres ecuaciones* bastarán para determinar el movimiento; finalmente, si el sólido es libre en el espacio, se podrá elejir arbitrariamente *seis* sistemas de cambios de lugar virtuales, compatibles con las ligazones; luego, *seis ecuaciones* bastarán para fijar el movimiento.

1.° *El sólido tiene un movimiento de traslacion*

A un momento cualquiera t, el único sistema de cambios de lugar virtuales, compatibles con las ligazones, es una traslacion δs.

Designemos con el símbolo P^t la proyeccion de un vector sobre la direccion de la traslacion δs, tendremos

$$\Sigma\, \delta\, \mathcal{T} m\gamma = \delta s\, \Sigma\, P^t\, m\gamma$$

$$\Sigma\, \delta\, \mathcal{T} F = \delta s\, \Sigma\, P^t\, F$$

Los segundos miembros deben ser iguales cualquiera que sea δs luego se debe tener

$$\Sigma\, P^t\, m\gamma = \Sigma\, P^t\, F$$

Esta ecuacion determina completamente el movimiento del sólido. El primer miembro puede trasformarse; se tiene, en efecto, para un punto cualquiera

$$P : m\gamma = \frac{d\,P : mv}{dt}$$

luego se puede escribir tambien

$$\frac{d\,\Sigma\, P : mv}{dt} = \Sigma P : F \tag{1}$$

En el caso considerado, la velocidad v es, a un mismo momento, comun a todos los puntos del sólido, luego si M es la masa total, se tiene simplemente

$$M\frac{dv}{dt} = \Sigma\, P : F$$

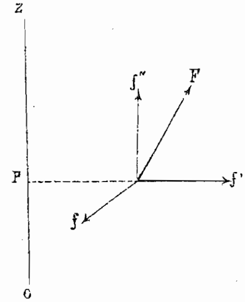
La condicion necesaria del equilibrio es evidentemente

$$\Sigma P : F = 0$$

2.º *El sólido jira al rededor de un eje fijo*

Sea (fig. 15) OZ el eje de rotacion i M un punto del sólido; el único movimiento virtual, compatible con las ligazones, es, a cada momento, una rotacion al rededor de OZ. Sea $\delta\alpha$ el ángulo de esta rotacion i F una fuerza aplicada en un punto M del sólido; busquemos el trabajo virtual correspondiente de esta fuerza.

Fig. 15



Podemos, para esto, reemplazar la fuerza F por tres componentes f, f', f''; elejiremos f'' paralelo a OZ, f' en la direccion de la perpendicular MP, bajada desde M sobre OX i f perpendicular a los dos primeros; se tendrá entónces

$$\delta\,\mathfrak{T}F = \delta\,\mathfrak{T}f + \delta\,\mathfrak{T}f' + \delta\,\mathfrak{T}f''$$

Sea $PM=r$; la fuerza f tiene la misma direccion que el cambio de lugar del punto M, luego

$$\delta\ \mathfrak{T} f = fr\ \delta\alpha$$

Por otra parte, los trabajos virtuales de f' i f'' son nulos, luego

$$\delta\ \mathfrak{T} F = fr\ \delta\alpha$$

Busquemos ahora el momento de la fuerza F respecto a OZ, se tiene

$$M_z^t\ F = M_z^t\ f + M_z^t\ f' + M_z^t\ f''$$

Los momentos de f' i f'' son nulos i el momento de f es fr; luego tambien

$$M_z^t\ F = fr$$

Se obtiene finalmente la relacion

$$\delta\ \mathfrak{T} F = \delta\alpha\ M_z^t\ F$$

Apliquemos esta fórmula al sólido, animado de una rotacion virtual $\delta\alpha$ al rededor de OZ, tendremos

$$\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T} m\,\gamma = \delta\alpha\ \Sigma\ M_z^t\ m\,\gamma$$

$$\Sigma\,\delta\ \mathfrak{T} F = \delta\alpha\ \Sigma\ M_z^t\ F$$

Los segundos miembros deben ser iguales, cualquiera que sea $\delta\alpha$, luego se debe tener

$$\Sigma\ M_z^t m\,\gamma = \Sigma\ M_z^t\ F$$

Esta ecuacion determina, por consiguiente, el movimiento del sólido, al rededor del eje OZ.

El primer miembro puede trasformarse; en efecto, se tiene, para un punto cualquiera,

$$M_z^t m\,\gamma = \frac{d\ M_z^t\ mv}{dt}$$

Luego, se tiene tambien

$$(2) \qquad \frac{d \sum M_z^t mv}{dt} = \sum M_z^t F$$

Sea θ el ángulo de PM con una direccion fija, perpendicular a OZ, la velocidad del punto M es

$$v = r\frac{d\theta}{dt}$$

i como esta velocidad es perpendicular a PM,

$$M_z^t mv = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$ es, a cada momento, comun a todos los puntos del sólido, luego

$$\sum M_z^t mv = \frac{d\theta}{dt} \sum mr^2$$

La ecuacion (2) da entónces

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} \sum mr^2 = \sum M_z^t F$$

El coeficiente $\sum mr^2$ se llama *momento de inercia* del sólido respecto del eje OZ.

La condicion necesaria para el equilibrio es entónces

$$\sum M_z^t F = 0$$

Esta condicion espresa que la suma de los momentos de la fuerzas esteriores, respecto al eje de rotacion, debe ser nula, o bien que las fuerzas esteriores deben ser equivalentes a dos fuerzas cuyas líneas de accion encuentran el eje de rotacion.

3.º *El sólido tiene un punto fijo*

A cada momento, el movimiento mas jeneral del sólido, compatible con las ligazones, es una rotacion arbitraria al rededor de un eje que pasa por el punto fijo; esta rotacion puede ser considerada como la resultante de tres rotaciones simultáneas, arbitrarias e independientes entre sí, al rededor de tres ejes rectangulares OX, OY, OZ que pasan por el punto fijo; la fórmula jeneral de Lagrange, aplicada sucesivamente a cada una de estas rotaciones dará, segun (2)

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\,\Sigma M_x^t\, mv}{dt} &= \Sigma M_x^t\, F \\ \frac{d\,\Sigma M_y^t\, mv}{dt} &= \Sigma M_y^t\, F \\ \frac{d\,\Sigma M_z^t\, mv}{dt} &= \Sigma M_z^t\, F \end{aligned} \right.$$

Tales son las tres ecuaciones que determinarán el movimiento del sólido al rededor del punto fijo.

Las condiciones necesarias del equilibrio serán por consiguiente

$$\Sigma M_x^t F = 0$$

$$\Sigma M_y^t F = 0$$

$$\Sigma M_z^t F = 0$$

Estas condiciones espresan que las fuerzas esteriores deben ser equivalentes a una fuerza única que pasa por el punto fijo.

4.° *El sólido se mueve paralelamente a un plano*

El movimiento mas jeneral, compatible con las ligazones, es entónces una traslacion arbitraria paralela al plano P i una rotacion al rededor de un eje, perpendicular al plano. Sean OX, OY dos ejes rectangulares situados en el plano P i OZ un eje perpendicular a este plano.

La traslacion puede reemplazarse por dos traslaciones arbitrarias e independientes, paralelas respectivamente a OX i OY

i las ecuaciones correspondientes, deducidas de la fórmula de Lagrange, serán

$$\frac{d \sum P_x^t \, mv}{dt} = \sum P_x^t F$$

$$\frac{d \sum P_y^t \, mv}{dt} = \sum P_y^t F$$

La rotacion virtual, al rededor del eje OZ dará en seguida

$$\frac{d \sum M_z^t \, mv}{dt} = M_z^t F$$

Cuando se trata del movimiento de una figura plana en su plano, se consideran, simplemente en este plano, dos ejes rectangulares OX i OY i los momentos respecto al eje OZ se llaman entónces *momentos respecto del punto O.*

Las condiciones necesarias del equilibrio de una figura plana, móvil en su plano, son por consiguiente

$$\sum P_x^t F = 0$$

$$\sum P_y^t F = 0$$

$$\sum M_z^t F = 0$$

5.º *El sólido se mueve libremente en el espacio*

El movimiento virtual, mas jeneral, compatible con las ligazones puede ser considerado como la resultante de tres traslaciones, paralelas a tres ejes rectangulares i tres rotaciones, al rededor de los mismos ejes. Cada uno de los movimientos componentes es arbitrario e independiente de los demas i la aplicacion de la fórmula de Lagrange dará *seis* ecuaciones que se deducen de (1) i (2); son las siguientes

$$\frac{d \sum P_x^t \, mv}{dt} = \sum P_x^t F \qquad \frac{d \sum M_x^t \, mv}{dt} = \sum M_x^t F$$

$$\frac{d \sum P_y^t \, mv}{dt} = \sum P_y^t F \qquad \frac{d \sum M_y^t \, mv}{dt} = \sum M_y^t F$$

$$\frac{d \sum P_z^t \, mv}{dt} = \sum P_z^t F \qquad \frac{d \sum M_z^t \, mv}{dt} = \sum M_z^t F$$

Son precisamente las seis ecuaciones fundamentales establecidas en el capítulo I.

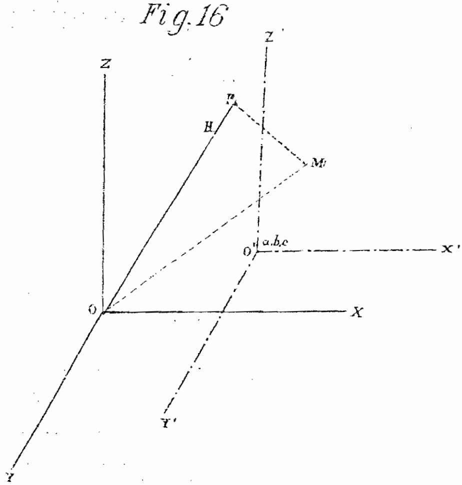
Las condiciones necesarias del equilibrio son evidentemente

$$\Sigma P_x^t F=0 \qquad \Sigma M_x^t F=0$$
$$\Sigma P_y^t F=0 \qquad \Sigma M_y^t F=0$$
$$\Sigma P_z^t F=0 \qquad \Sigma M_z^t F=0$$

DE LOS MOMENTOS DE INERCIA

El momento de inercia de un sólido, respecto a un eje, depende evidentemente de la situacion del eje, respecto del sólido.

Fig. 16



Consideremos (fig. 16) un sólido cualquiera i un sistema fijo de tres ejes rectangulares; sea OP un eje que pasa por el oríjen O i α, β, γ los cosenos directores de OP; el momento de inercia del sólido respecto a OP depende de la direccion de OP, es decir de los tres cosenos α, β, γ; trataremos de establecer esta relacion.

Sea M un punto del sólido, r su distancia MP al eje, m su masa i, x, y, z sus coordenadas, se tiene:

$$r^2=\overline{OM}^2-\overline{OP}^2=x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

O bien

$$r^2=x^2(1-\alpha^2)+y^2(1-\beta^2)+z^2(1-\gamma^2)-2\beta\gamma yz$$
$$-2\gamma\alpha zx-2\alpha\beta xy.$$

O todavía

$$r^2 = x^2(\beta^2 + \gamma^2) + y^2(\gamma^2 + \alpha^2) + z^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\,\beta\gamma\, y z - 2\,\gamma\,\alpha\, z\, x$$
$$- 2\,\alpha\,\beta\, x\, y$$

Se puede escribir tambien

$$r^2 = \alpha^2\,(y^2 + z^2) + \beta^2\,(z^2 + x^2) + \gamma^2\,(x^2 + y^2) - 2\,\beta\gamma\, y\, z\, x$$
$$- 2\gamma\,\alpha\, z\, x - 2\,\alpha\,\beta\, x\, y$$

Multipliquemos los dos términos de esta ecuacion por m i sumemos todas las ecuaciones análogas, relativas a los demas puntos del sólido, tendremos

$$(5) \qquad \Sigma\, m v^2 = \alpha^2\,\Sigma\, m\,(y^2 + z^2) + \beta^2\,\Sigma\, m\,(z^2 + x^2)$$
$$+ \gamma^2\,\Sigma\, m\,(x^2 + y^2) - 2\beta\,\gamma\,\Sigma\, m\, y\, z - 2\,\gamma\,\alpha\,\Sigma\, m\, z\, x - 2\,\alpha\beta\,\Sigma\, m\, x\, y$$

Sean A, B, C los momentos de inercia del sólido, respecto de los tres ejes OX, OY, OZ, se tendrá por definicion

$$A = \Sigma\, m\,(y^2 + z^2)$$
$$B = \Sigma\, m\,(z^2 + x^2)$$
$$C = \Sigma\, m\,(x^2 + y^2)$$

Hagamos tambien

$$D = \Sigma\, m\, y\, z$$
$$E = \Sigma\, m\, z\, x$$
$$F = \Sigma\, m\, x\, y$$

Estas tres últimas cantidades se llaman *productos de inercia* La ecuacion (5) se trasformará en la siguiente

$$(6) \qquad \Sigma\, m r^2 = A\,\alpha^2 + B\,\beta^2 + C\,\gamma^2 - 2\,D\,\gamma - 2\,E\,\gamma\alpha - 2\,F\,\alpha\beta$$

Esta última relacion resuelve el problema; en efecto, cuando el sólido está dado i los tres ejes OX, OY, OZ elejidos, las cantidades A, B, C, D, E, F son determinadas; la ecuacion (6) da en seguida el valor del momento de inercia en funcion de los tres cosenos α, β, γ que definen la posicion de un eje cualquiera que pasa por O.

Elipsoide de inercia

Tomemos, sobre cada eje OP, una lonjitud

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\, m r^2}}$$

i sean X, Y, Z las coordenadas del punto H; busquemos el lugar jeométrico de los puntos H cuando el eje OP toma todas las direcciones al rededor de O; se tendrá

$$\alpha = X\sqrt{\Sigma\, mr^2}, \quad \beta = Y\sqrt{\Sigma\, mr^2}, \quad \gamma = Z\sqrt{\Sigma\, mr^2}$$

i llevando estos valores en (6) se obtendrá

$$(7) \qquad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2\,DYZ - 2\,EZX - FXY$$

Esta es la ecuacion de una superficie del segundo grado, referida a su centro. Como el momento de inercia $\Sigma\, mr^2$ no puede ser nunca nulo, el radio vector OH de la superficie de segundo grado no puede ser nunca infinito, luego la superficie es siempre un elipsoide: es el *elipsoide de inercia.*

El elipsoide tiene tres ejes principales, estos se llaman *ejes principales de inercia.*

La condicion para que uno de los ejes de coordenadas sea eje principal de inercia se deduce inmediatamente de la ecuacion misma del elipsoide.

Así, para que el eje OX sea principal de inercia, es necesario que la ecuacion (7) no cambie cuando Y i Z se cambian en $-Y$ i $-Z$, luego es necesario que

$$E = 0 \qquad F = 0$$

O bien

$$\Sigma\, m\, z\, x = 0 \qquad \Sigma\, m\, x\, y = 0$$

Así, la condicion para que OX sea eje principal de inercia es que los dos productos de inercia en los cuales figura la letra x serán nulos. Lo mismo obtendríamos para OY i OZ.

Si los tres ejes de coordenadas son ejes principales de inercia, la ecuacion (9) se deduce a

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2$$

Los tres momentos A, B, C son entónces los *momentos principales* de inercia.

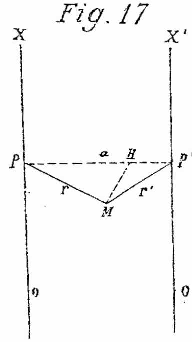
La fórmula (6) se reduce entónces a la siguiente

$$\Sigma\, mvr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

PROBLEMA I

Conociendo el momento de inercia de un sólido, respecto de un eje que pasa por el centro de gravedad, determinar el momento de inercia respecto de un eje paralelo.

Fig. 17



Sea (fig. 17) OX un eje que pasa por el centro de gravedad del sistema, $O'X'$ un eje paralelo al primero i situado a la distancia a, M un punto cualquiera del sólido i $MP = r$, $MP' = r'$ sus distancias respectivas a los dos ejes. Sean tambien I i I' los momentos de inercia respecto de los ejes OX i $O'X'$, se tiene

$$I = \Sigma\, mr^2$$

$$I' = \Sigma\, mr'^2$$

Sea ahora $PH = x$ la proyeccion de r sobre PP', se tiene, en el triángulo MPP'

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2\, ax$$

Luego

$$\Sigma\, mr'^2 = \Sigma\, mr^2 + a^2\, \Sigma\, m - 2\, a\, \Sigma\, mx$$

Como, por hipótesis, el centro de gravedad está situado sobre OX, se tiene

$$\Sigma\, mx = 0$$

Sea tambien M la masa total del sistema, tendremos

$$I' = I + Ma^2 \tag{8}$$

PROBLEMA II

Conociendo el elipsoide de inercia, en el centro de gravedad de un sólido, determinar la forma del elipsoide de inercia en otro punto.

Supondremos que, en la figura (14), O es el centro de gravedad de un sólido i OX, OY, OZ los ejes principales en este punto; se quiere determinar el elipsoide de inercia en O'; sean a, b, c las coordenadas de O'; consideremos en este punto, tres ejes rectangulares $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ paralelos a los primeros i sean x' y', z' las coordenadas del punto M, tendremos

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

$$z' = z - c$$

Sean A, B, C los tres momentos principales de inercia en O; la forma del elipsoide en O' será determinada por seis cantidades análogas A', B', C', D', E', F'.

Se tiene ahora

$$A' = \Sigma\, m\,(y'^2 + z'^2) = \Sigma\, m\,(y^2 + z^2) - 2\,b\,\Sigma\, my - 2\,c\,\Sigma\, mz$$
$$+ M\,(b^2 + c^2)$$

$$D' = \Sigma\, m\, y'\, z' = \Sigma\, m\, y\, z - b\,\Sigma\, mz - c\,\Sigma\, my + M\,bc$$

Estas dos fórmulas se reducen con las convenciones hechas mas arriba; en efecto

$$\Sigma\, m\,(y^2 + z^2) = A$$

$$\Sigma\, my = 0$$

$$\Sigma\, mz = 0$$

$$\Sigma\, myz = 0$$

Los valores de B', C', E', F' se obtendrán por permutacion, i se tiene finalmente

$$\begin{array}{ll} A' = A + M(b^2 + c^2) & D' = M\,bc \\ B' = B + M(c^2 + a^2) & E' = M\,ca \\ C' = C + M(a^2 + b^2) & F' = M\,ab \end{array}$$

Para que uno de los ejes de coordenadas, $O'X'$, por ejemplo, sea principal de inercia, es necesario que a sea igual a cero; esto espresa que el punto O' está en el plano YOZ, este plano es uno de los *planos principales* del elipsoide de inercia. Luego, *en todos los puntos de un plano principal del centro de gravedad, uno de los ejes principales de inercia es perpendicular al plano considerado.*

En otros términos; *si un plano es principal de inercia en el centro de gravedad; el mismo plano es principal de inercia en todos sus demas puntos.*

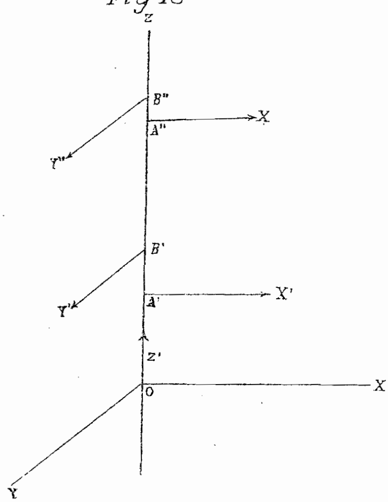
Para que los tres ejes $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ sean principales de inercia en O' es necesario que dos de las coordenadas a, b, c sean nulas, el punto O' se encuentra entónces sobre uno de los ejes principales del punto o. Luego, *en todos los puntos de un eje principal de inercia del centro de gravedad, el elipsoide de inercia tiene sus ejes principales paralelos a los del centro de gravedad.*

Cálculo de las reacciones que un sólido invariable, móvil al rededor de un eje fijo, ejercita sobre el eje de rotacion

Como el movimiento del sólido es determinado por una sola ecuacion, quedan *cinco* para determinar las ligazones; se elejirán por consiguiente las fuerzas de ligazon de tal manera que ellas equivalen a cinco incógnitas.

Sea (fig. 18) OZ el eje de rotacion; consideremos dos ejes OX, OY que forman con OZ un sistema de tres ejes de coordenadas rectangulares. Para fijar invariablemente la posicion de OZ se puede colocar: 1.º en O, una fuerza Z' que impide el resbalamiento del sólido en el sentido OZ; 2.º en los puntos arbitrarios A' i A'' dos fuerzas X', X'' paralelas a OX; 3.º en dos puntos tambien arbitrarios B', B'' dos fuerzas Y', Y'' paralelas a OY.

Fig 18



Ninguna de estas fuerzas impide la libre dilatacion del sólido; luego las cinco se podrán determinar sin que intervengan las fuerzas interiores o acciones moleculares.

Las reacciones del sólido sobre el eje serán respectivamente iguales i de sentido contrario a las fuerzas de ligazon correspondientes; las designaremos con las mismas letras afectadas de un indicio r.

El procedimiento jeneral, para determinar una fuerza de ligazon es de dar al sólido un cambio de lugar virtual que haga trabajar la ligazon buscada i que sea compatible con las ligazones restantes; así, por ejemplo, para determinar Z' se dará al sólido una traslacion δz paralela a OZ, ésta no hará trabajar las fuerzas de ligazon perpendiculares a OZ pero hará trabajar Z'; se tendrá entónces, segun la ecuacion jeneral de Lagrange

$$\Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} m\gamma = \Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F + Z'\, \delta z$$

En el caso considerado, las aceleraciones de todos los puntos son perpendiculares a OZ i su proyeccion sobre OZ es igual a cero; por otra parte

$$\Sigma\, \delta\, \mathfrak{T} F = \delta z\, \Sigma\, P_z^t\, F$$

Luego

$$0 = \delta z \, (\Sigma \, P_z^t \, F + Z')$$

Como esta ecuacion debe tener lugar cualquiera que sea δz se deberá tener

$$Z' = -P_z^t \, F$$

Se podria por el mismo procedimiento determinar separadamente cada una de las cuatro otras fuerzas de ligazon; sin embargo, es preferible determinar conjuntamente las que son paralelas.

Demos al sólido una traslacion virtual δx paralela a OX, esta traslacion hará trabajar las dos fuerzas X' i X'' i se tendrá

$$\delta x \, \Sigma \, P_x^t \, m\gamma = \delta x \, \Sigma \, P_x^t \, F + (X' + X'') \, \delta x$$

Luego

$$X' + X'' = \Sigma \, P_x^t \, m\gamma - \Sigma \, P_x^t \, F$$

Sean ξ, η, ζ las coordenadas del centro de gravedad i M la masa total del sólido, se tendrá tambien

$$X' + X'' = M \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Sigma \, P_x^t \, F$$

Demos ahora al sólido una rotacion virtual $\delta\alpha$ al rededor del eje OY i sean a', a'' las distancias OA' i OA'', tendremos

$$\delta \alpha \, \Sigma \, M_y^t \, m\gamma = \delta \alpha \, \Sigma \, M_y^t \, F + a' \, X' \, \delta\alpha + a'' \, X'' \, \delta\alpha$$

Luego

$$a' \, X' + a'' \, X'' = \Sigma \, M_y^t \, m\gamma - \Sigma \, M_y^t \, F$$

Ahora

$$\Sigma \, M_y^t \, m\gamma = \Sigma \, mz \frac{d^2 x}{dt^2}$$

O bien, si se nota que el z de cada punto queda constante

$$\Sigma\, M_y^t\, m\gamma = \frac{d^2\; mxz}{dt^2}$$

Luego

$$a'\, X' + a''\, X'' = \frac{d^2\, \Sigma\, mxz}{dt^2} - \Sigma M_y^t\, F$$

De la misma manera se obtienen las dos fórmulas siguientes en las cuales b' i b'' son las distancias OB' i OB''

$$Y' + Y'' = M \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \Sigma\, P_y^t\, F$$

$$b'\, Y' + b''\, Y'' = \frac{d^2\;\; \Sigma myz}{dt^2} + \Sigma\, M_x^t\, F$$

Caso particular en que OZ es eje principal de inercia en el punto O i en que las fuerzas esteriores son equivalentes a una resultante única situada en el plano XOY.

En este caso, las fórmulas obtenidas se simplifican; en efecto, la suma de las proyecciones de las fuerzas esteriores sobre OZ es igual a cero i la suma de los momentos de las mismas fuerzas respecto a OX i OY son tambien iguales a cero; ademas los *productos de inercia* son nulos, luego

$$Z' = 0$$

$$X' + X'' = M\, \frac{d^2\, \xi}{dt^2} - \Sigma\, P_x^t\, F$$

$$a'\, X' + a''\, X'' = 0$$

$$Y' + Y'' = M\, \frac{d^2\, \eta}{dt^2} - \Sigma\, P_y^t\, F$$

$$b'\, Y' + b''\, Y'' = 0$$

Se ve que las fuerzas X', X'' se componen, a cada momento, en una fuerza que pasa por el punto O i del mismo modo

Y' e Y'; luego basta fijar el punto O para que el sólido siga jirando indefinidamente al rededor de OZ.

Por esta razon se llaman tambien los ejes principales de inercia ejes *permanentes de rotacion.*

Si se fijan dos puntos de OZ simétricos respecto del punto O, las fuerzas de ligazon que obran en estos dos puntos son iguales i paralelas i sus componentes segun OX i OY son

$$
(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} X' &= \frac{1}{2}\left(M\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Sigma P_x^t F\right) \\ Y' &= \frac{1}{2}\left(M\frac{d^2\eta}{dt^2} - \Sigma P_y^t F\right) \end{aligned} \right.
$$

i, si el centro de gravedad se encuentra sobre el eje de rotacion, como en el caso de los volantes, se tiene simplemente

$$
X' = -\frac{1}{2}\Sigma P_x^t F
$$

$$
Y' = -\frac{1}{2}\Sigma P_y^t F
$$

En este caso las fuerzas de ligazon no dependen del movimiento de rotacion del sólido sino de las fuerzas esteriores que, por hipótesis, obran en el plano de simetría.

Condicion para que un sólido invariable, abandonado a sí mismo en el espacio, jire al rededor de un eje fijo

La condicion necesaria i suficiente es que las fuerzas de ligazon que obligan el eje a conservar una direccion invariable, sean todas nulas.

Como, por hipótesis, las fuerzas esteriores son nulas, la velocidad angular de rotacion es constante. La fuerza de ligazon Z' es igual a cero; para que las demas sean tambien nulas es necesario que se tenga

$$
M\frac{d^2\xi}{dt^2} = M\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0
$$

$$
\frac{d^2\Sigma m x z}{dt^2} = \frac{d^2\Sigma m y z}{dt^2} = 0
$$

Sea ω la velocidad angular constante de la rotacion; la aceleracion de un punto cualquiera del sólido se reduce a la aceleracion centípetra; sean x, y, z las coordenadas del punto considerado; las proyecciones de su aceleracion serán $-\omega^2 x$ sobre OX, $-\omega^2 y$ sobre OY i cero sobre OZ, luego las condiciones obtenidas mas arriba pueden escribirse tambien

$$-M\omega^2 \xi = -M\omega^2 \eta = 0$$

$$-\omega^2 \Sigma m x z = -\omega^2 \Sigma m y z = 0$$

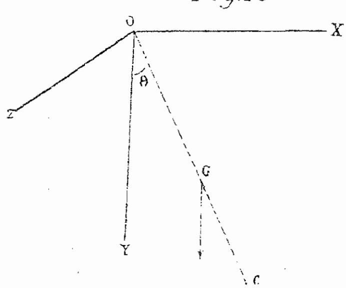
Si ω no es nulo es necesario que ξ i η sean nulos, luego el centro de gravedad debe estar sobre el eje de rotacion; en seguida los dos productos de inercia deben ser nulos, luego el eje de rotacion debe ser principal de inercia.

Tales son las condiciones buscadas.

DEL PÉNDULO COMPUESTO

El péndulo compuesto es un sólido invariable, sometido a la accion de la pesantez i móvil al rededor de un eje horizontal OX.

Fig. 19



El movimiento del péndulo será determinado por la fórmula (6). Elejiremos el orijen de tal manera que el centro de gravedad G (fig. 19) se encuentra en el plano XOY; sea O su distancia OG al eje de rotacion i θ el ángulo de OG con la vertical OY. Si M es la masa total del sólid,o las fuerzas esteriores se componen en una fuerza vertical Mg aplicada en el punto G, luego

$$\Sigma M_z^t F = -Mga \text{ sen } \theta$$

La fórmula (6) da entónces

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma\, mr^2 = -Mga \text{ sen } \theta$$

Hagamos

$$l = \frac{\Sigma\, mr^2}{Ma}$$

Tendremos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{ sen } \theta = 0$$

Es la ecuacion del movimiento del péndulo simple, luego el péndulo compuesto se mueve como un péndulo simple, de lonjitud l.

Sea I el momento de inercia del sólido respecto de un eje paralelo a OZ i que pase por el centro de gravedad, tendremos

$$\Sigma\, mr^2 = I + Ma^2$$

Pongamos tambien

$$I = M\, K^2$$

La lonjitud K se llama *radio de jiracion;* tendremos

$$\Sigma\, mr^2 = M\,(a + K^2)$$

Luego

$$l = a + \frac{K^2}{a}$$

Tomemos, sobre la prolongacion de OG, una lonjitud $GC = \frac{K^2}{a}$; el eje paralelo a OX i que pasa por G se llama *eje de oscilacion.*

Los ejes de rotacion i de oscilacion son recíprocos.—Supongamos, en efecto, que se suspenda el sólido al eje de oscilacion, la distancia del centro de gravedad al nuevo eje de rotacion será

$$a' = \frac{K^2}{a}$$

i la lonjitud l' del péndulo simple equivalente será, por consiguiente

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'} = \frac{K^2}{a} + a = l$$

Mínimo de la lonjitud del péndulo simple equivalente a un péndulo compuesto.

Este mínimo tiene lugar cuando $a + \frac{K^2}{a}$ es mínimo, es decir cuando $a = K$. En este caso se tiene

$$l = 2\,a$$

Reacciones del péndulo sobre sus apoyos

Supondremos que el péndulo sea simétrico respecto del plano vertical que contiene el centro de gravedad i que los puntos de apoyo esten tambien a igual distancia de este plano, a uno i otro lado. El eje OZ es entónces principal de inercia en el punto O i las reacciones se deducen de las fórmulas (9).

Sean X_r, Y_r los componentes de cada reaccion segun las direcciones OX i OY se tendrá, segun (9).

$$X_r = -\frac{1}{2}\left(M\frac{d^2\xi}{dt} - \Sigma P_x^t F\right)$$

$$Y_r = -\frac{1}{2}\left(M\frac{d^2\eta}{dt^2} - \Sigma P_y^t F\right)$$

Se tiene ahora

$$\xi = a \operatorname{sen} \theta \quad \Sigma P_x^t F = 0$$

$$\eta = a \cos \theta \quad \Sigma P_y^t F = Mg$$

Luego

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = +a \cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - a \operatorname{sen}\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -a \operatorname{sen}\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - a \cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Supongamos las oscilaciones de pequeña amplitud; sea T el tiempo de una oscilacion i θ_0 el valor inicial de θ, tendremos

$$\theta = \theta_0 \cos\frac{\pi t}{T}$$

Luego

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \frac{\pi}{T} \operatorname{sen}\frac{\pi t}{T}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \frac{\pi^2}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T}$$

Despreciaremos θ_0^2, entónces

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -a\,\theta_0 \frac{\pi^2}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$$

I, por consiguiente

$$X_r = \frac{1}{2} M a\, \theta_0 \frac{\pi^2}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T}$$

$$Y_r = \frac{1}{2} Mg$$

En resúmen, si se desprecia θ_0^2, las reacciones verticales Y_r pueden ser consideradas como constantes i su resultante $2\,Y_r$ es igual al peso del péndulo; miéntras tanto las reacciones horizontales varian constantemente de intensidad i el período de esta variacion es el tiempo mismo de la oscilacion del péndulo.

Las dos reacciones horizontales son nulas cuando el centro de gravedad del péndulo está en la vertical del eje de suspension i son máximas cuando el péndulo tiene su amplitud máxima; la resultante de su accion sobre los apoyos es entónces

$$R = M\, a\, \theta_0 \frac{\pi^2}{T^2}$$

O bien, si se observa que

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$R = M\, a\, \theta_0 \frac{g}{l}$$

Sea P el peso del péndulo, se tendrá tambien

$$R = P \frac{a}{l}\, \theta_0$$

Supongamos que P sea espresado en kilógramos i θ_0 en grados, el número de gramos contenido en R será

$$R_{gr} = 17{,}45\, P_{Kg} \frac{a}{l}\, \theta_0$$

Sea, por ejemplo, $P = 10$ kilóg., $\theta_0 = 2^\circ{,}9$, $\frac{a}{l} = 1$, se obtiene sensiblemente

$$R = 500 \text{ gramos}$$

CAPÍTULO VII

MOVIMIENTO DEL SÓLIDO INVARIABLE AL REDEDOR DE UN PUNTO FIJO

Sea O el punto fijo; OX, OY, OZ tres ejes rectangulares fijos en el espacio. Respecto a estos tres ejes, el movimiento del sólido es completamente definido por las ecuaciones

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\frac{d \sum M_x^t \, mv}{dt} &= \sum M_x^t \, F \\
\frac{d \sum M_y^t \, mv}{dt} &= \sum M_y^t \, F \\
\frac{d \sum M_z^t \, mv}{dt} &= \sum M_z^t \, F
\end{aligned} \right.
$$

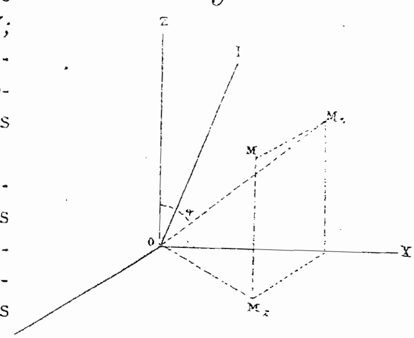
Consideremos el oríjen O como un centro de reduccion i sea G el eje del par resultante de las cantidades de movimiento, E el eje del par resultante de las fuerzas esteriores; las ecuaciones (1) espresan, como se sabe, que la estremidad del eje G tiene, a cada momento, una velocidad igual a E.

Determinacion del ej G

A un momento cualquiera t, el movimiento elemental del sólido es una rotacion al rededor de cierto eje OI (fig. 20); sea ω el eje de esta rotacion instantánea i p, q, r las proyecciones de ω sobre los tres ejes OX, OY, OZ; la rotacion ω puede reemplazarse por tres rotaciones simultáneas cuyos ejes son p, q, r.

Sea entónces M un punto del sólido; x, y, z sus coordenadas, v su velocidad i v_x, v_y, v_z las proyecciones de v sobre los tres ejes.

Fig 20



Busquemos el valor de v_x.

La rotacion p, al rededor de OX, da al punto M una velocidad perpendicular a OX i la proyeccion de esta velocidad sobre OX es nula. La rotacion q da, al punto M, la misma velocidad que al punto M_y, proyeccion de M sobre ZOX; sea α el ángulo ZOM_y se tiene

$$x = OM_y \sin \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = OM_y \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Pero $OM_y \cos \alpha$ es igual a z i $\frac{d\alpha}{dt}$ a q, luego la rotacion q da al punto M una velocidad tal que su proyeccion sobre OX es qz; se ve de la misma manera que la rotacion r da al punto M una velocidad tal que su proyeccion sobre CX es igual a $-ry$; finalmente v_x es igual a $qz-ry$. Una simple permutacion da, en seguida, los valores de v_y, v_z i se obtienen las siguientes fórmulas

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx \end{aligned} \right.$$

Se tiene ahora

$$M_x^t \, mv = m(v_z y - v_y z) = pm(z^2 + y^2) - r\, mxz - q\, mxy$$

Luego

$$\Sigma M_x^t \, mv = p \Sigma m(z^2 + y^2) - r \Sigma mxz - q \Sigma mxy$$

Supongamos que los tres ejes fijos coinciden, en el momento t, con los ejes principales de inercia del sólido i sean A, B, C los momentos principales, tendremos simplemente

$$\Sigma M_x^t \, mv = Ap$$

I, por analojía

$$\Sigma M_y^t \, mv = Bq$$

$$\Sigma M_z^t \, mv = Cr$$

En resúmen, las proyecciones del eje G, sobre los tres ejes principales de inercia del sólido son respectivamente iguales a Ap, Bq, Cr.

Ecuaciones de Euler

Busquemos las proyecciones, sobre los tres ejes principales de inercia del sólido, de la velocidad de la estremidad del eje G. Esta velocidad es la resultante de dos velocidades simultáneas; en efecto, los ejes principales de inercia del sólido son móviles en el espacio i la velocidad relativa de la estremidad del eje G respecto de estos tres ejes móviles tiene por proyecciones

$$A\frac{dp}{dt}, \quad B\frac{dq}{dt}, \quad C\frac{dr}{dt}$$

Ahora, la velocidad de arrastre de la misma estremidad se deducirá de los valores de v_x, v_y, v_z reemplazando en ellas las coordenadas x, y, z por Ap, Bq, Cr; luego las tres proyecciones de la velocidad de arrastre son

$$(C-B)\,qr, \; (A-C)\,rp, \; (B-A)\,pq$$

Las proyecciones de la velocidad absoluta de la estremidad del eje G sobre los ejes principales de inercia son por consiguiente

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq$$

Sean E_x, E_y, E_z las proyecciones, sobre los mismos ejes principales, del eje E del par resultante de las fuerzas esteriores, tendremos, segun (1).

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=E_x\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=E_y\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=E_z\end{aligned}\right.$$

Son las ecuaciones de *Euler.*

La integracion es en jeneral imposible.

Deduciremos de estas ecuaciones una relacion qne nos será útil mas adelante; es la siguiente

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=pE_x+qE_y+rE_z$$

Sea

$$H=Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

Podremos escribir

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\frac{dH}{dt}=\omega E\cos(\omega, E)$$

Es fácil de averiguar que H es la fuerza viva del sistema; en efecto, de las relaciones (2) se deduce

$$v^2=p^2(y^2+z^2)+q^2(z^2+x^2)+r^2(x^2+y^2)+2qryz$$
$$-2rpzx-2pqxy$$

Luego, si se nota que los ejes de coordenadas son los ejes principales de inercia,

$$\Sigma mv^2=Ap^2+Bq^2+Cr^2.$$

Es precisamente el valor de H. La ecuacion (4) podia establecerse directamente; en efecto, el trabajo de las fuerzas esteriores correspondiente a la rotacion $\omega\, dt$ es

$$\omega\, dt.\, E\cos(\omega, E)$$

i este trabajo es igual al medio aumento de la fuerza viva es decir a $\frac{1}{2}dH$; es precisamente lo que espresa la ecuacion (4).

Se averigua, con la ecuacion (4) que la fuerza viva queda constante cuando el eje E es nulo.

Relacion jeométrica entre las direcciones de los ejes G i ω

La ecuacion del elipsoide de inercia, referido a sus tres ejes principales es

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

i el plano tanjente al elipsoide en uno de sus puntos M, de coordenadas x, y, z, tiene por ecuacion

$$Ax\,X + By\,Y + Cz\,Z = 1$$

Si el punto M se encuentra sobre el eje ω sus coordenadas son proporcionales a p, q, r; luego los coeficientes de X, Y, Z, en la ecuacion del plano tanjente, son proporcionales a Ap, Bq, Cr.

De ahí se deduce que el plano considerado es perpendicular al eje G. Así, *el plano tanjente al elipsoide en el punto de encuentro con el eje instantáneo de rotacion* ω, *es perpendicular al eje G del par resultante de las cantidades de movimiento.*

Esta propiedad permite calcular de antemano cuál es el órden de magnitud del ángulo δ de los ejes G i ω, cuando se conoce la forma del elipsoide de inercia.

Sean, en efecto, ρ la distancia OM i h la distancia de O al plano tanjente al elipsoide de inercia en el punto M; se tiene

$$\cos\delta = \frac{h}{\rho}$$

I las cantidades ρ i h son determinadas por las relaciones.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z$$

$$\frac{1}{h} = A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2$$

Se tiene ademas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

De estas fórmulas se deduce la siguiente

$$\text{tg.}^2\,\delta=(C-B)^2\,y^2\,z^2+(A-C)^2\,z^2\,x^2+(B-A)^2\,x^2\,y^2$$

Esta última, muestra que el ángulo δ no puede ser nulo sino cuando dos de las coordenadas x, y, z son separadamente nulas, es decir cuando la direccion comun de los ejes ω i G se confunde con uno de los tres ejes principales de inercia.

Si el elipsoide es de revolucion, al rededor de OZ por ejemplo, se tiene $B=A$ i

$$\text{tj.}^2\delta=(A-C)^2\,z^2\,(x^2+y^2)$$

El ángulo δ es entónces nulo cuando el eje ω coincide con el eje de revolucion, o cuando está situado en el ecuador.

En fin, si el elipsoide se reduce a una esfera, el ángulo δ es siempre nulo i los ejes G i ω siempre en coincidencia.

En el caso jeneral, los máximos o mínimos de δ satisfacen a la relacion

$$h\,d\rho-\rho\,dh=0$$

O bien, si se reemplaza $d\rho$ i dh por sus valores

$$(1+A^2\,h^2\,\rho^2)\,x\,dx+(1+B^2\,h^2\,\rho^2)\,y\,dy+(1+C^2\,h^2\,\rho^2)\,z\,dz=0$$

Se tiene ademas

$$Ax\,dx+By\,dy+Bz\,dz=0$$

Luego las coordenadas de los puntos en que δ es máximo o mínimo satisfacen a las condiciones.

$$\frac{x\,(+A^2\,h^2\,\rho^2)}{Ax}=\frac{y\,(1+B^2\,h^2\,\rho^2)}{By}=\frac{z\,(1+C^2\,h^2\,\rho^2)}{Cz}$$

Los vértices del elipsoide satisfacen, el ángulo δ es entónces nulo, las otras soluciones posibles son ademas

$$x=0,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2B}}\ ,\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2C}}\ ,\quad \text{sen}\,\delta=\frac{B-C}{B+C}$$

$$y=0,\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{2C}}\ ,\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2A}}\ ,\quad \text{sen}\,\delta=\frac{C-A}{C+A}$$

$$z=0\ ,\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2A}}\ ,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2B}}\ ,\quad \text{sen}\,\delta=\frac{A-B}{A+B}$$

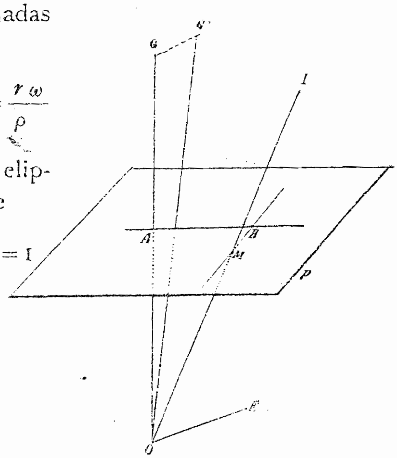
Estas fórmulas, aplicadas, por ejemplo, al caso de la Tierra muestran que el máximo del ángulo δ llega a 6 minutos mas o ménos; en este caso, por consiguiente, el ángulo de los ejes G i ω es siempre menor que 6 minutos.

Rodadura del elipsoide de inercia sobre una superficie desarrollable

Sea (fig. 21) M el punto de interseccion del eje ω con el elipsoide de inercia; P el plano tanjente al elipsoide en este punto; se sabe que este plano es perpendicular sobre OG; respecto del sistema de los tres ejes de inercia, las coordenadas del punto M son

$$x = \frac{p\,\omega}{\rho}, \quad y = \frac{q\,\omega}{\rho}, \quad z = \frac{r\,\omega}{\rho}$$

Fig. 21



Como M está sobre el elipsoide de inercia, se tiene

$$\frac{\omega^2}{\rho^2}(A p^2 + B q^2 + C r^2) = 1$$

O bien

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} H = 1$$

$$\rho = \frac{\omega}{\sqrt{H}}$$

Ademas, el plano P tiene por ecuacion

$$\frac{\rho}{\omega}(Ap\,X + Bq\,Y + Cr\,Z) = 1$$

Luego su distancia $OA = h$ es

$$h = \frac{\omega}{\rho\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{\omega}{\rho\,G}$$

O bien

$$h = \frac{\sqrt{H}}{G} \tag{5}$$

Si el eje E es nulo, G queda constante en magnitud, direccion i sentido i H queda constante, luego el plano P queda invariable. En este caso, el elipsoide de inercia queda tanjente a un plano invariable i el eje instantáneo de rotacion pasa siempre por el punto de contacto del elipsoide con el plano, luego *el elipsoide de inercia rueda sobre el plano P*. Esta interpretacion jeométrica del movimiento es debida a *Poinsot*. Por esto, se llama jeneralmente *movimiento de Poinsot* la rodadura de un elipsoide de centro fijo sobre un plano fijo.

En el caso jeneral, cuando el eje E no es nulo, *el elipsoide de inercia rueda sobre una superficie desarrollable.*

Busquemos, en efecto, como varia h con el tiempo. De la ecuacion (5) se deduce

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sqrt{H}}{dt} - \frac{\sqrt{H}}{G^2}\frac{dG}{dt}$$

Hemos encontrado mas arriba (4)

$$\frac{1}{2}\frac{dH}{dt} = \omega E \cos(\omega, E)$$

Luego

$$\frac{d\sqrt{H}}{dt} = \omega\sqrt{H}\, E \cos(\omega, E) = \rho\, E \cos(\omega, E)$$

Por otra parte, sea, en el momento t, $OE = E$ el eje del par resultante de las fuerzas esteriores i $OG = G$ el eje del par resultante de las cantidades de movimiento; la velocidad del punto G es igual a E, luego si $GG' = Edt$, OG' será la situacion del eje G en el momento $t + dt$. Sea $d\epsilon$ el ángulo GOG' se tiene, en la figura

$$\frac{dG}{dt} = E \cos(E, G)$$

$$G\frac{d\epsilon}{dt} = E \operatorname{sen}(E, G)$$

El valor de $\frac{dh}{dt}$ es por consiguiente

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{G} \left\{ \rho \cos(\omega, E) - h \cos(E, G) \right\}$$

Sea AB la traza del plano GOE en el plano P i MB una perpendicular bajada desde M sobre AB, tendremos

$$\rho \cos(\omega, E) = h \cos(E, G) + AB \operatorname{sen}(E, G)$$

Luego

$$\frac{dh}{dt} = \frac{E}{G} AB. \operatorname{sen}(E, G) = AB. \frac{d\epsilon}{dt}$$

Sea tambien BA' una perpendicular sobre OG', se tiene

$$OA' = h + AB.\, d\epsilon = h + dh$$

Luego, en el momento $t + dt$, el plano perpendicular al eje OG' i tanjente al elipsoide de inercia pasa por el punto A' i corta el plano P segun la recta BM perpendicular al plano GOE.

La sucesion de los planos P tiene por envolvente una superficie desarrollable i el elipsoide de inercia queda siempre tanjente a esa superficie; ademas, el eje instantáneo de rotacion pasa, a cada momento, por el punto de contacto de las dos superficies, luego, *durante el movimiento del sólido, el elipsoide de inercia rueda sobre una superficie desarrollable.* Esta superficie se puede llamar *superficie de rodadura.*

Se puede decir tambien: a cada momento, el elipsoide de inercia rueda sobre un plano P al mismo tiempo que este plano rueda sobre el elipsoide, el plano P se llama *plano instantáneo de rodadura.*

La interseccion de dos planos de rodadura infinitamente próximos pasa siempre por el punto de contacto del elipsoide de inercia con uno de ellos, es decir por un punto situado a distancia finita de O; luego estos dos planos no pueden ser paralelos sin confundirse rigorosamente.

Segun esto, el plano de rodadura queda invariable si el eje

G conserva una direccion fija; la superficie de rodadura se reduce entónces a un plano. Es el caso del movimiento de Poinsot i el caso tambien en que el eje E tiene la misma direccion que G.

Cono de precesion

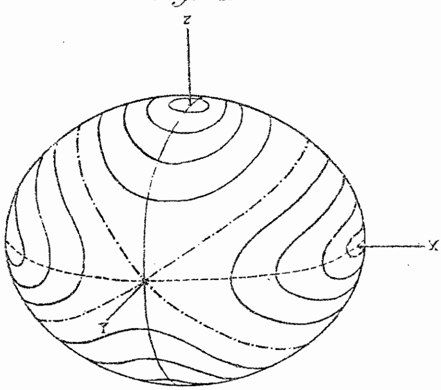
Se llama *cono de precesion* el lugar jeométrico de los ejes G en el espacio; cada jeneratriz es normal a uno de los planos instantáneos de rodadura, luego la podar, respecto del punto O, de la superficie de rodadura es una curva situada sobre el cono de precesion.

Sea V el ángulo que hace la tanjente a esta podar con la jeneratriz correspondiente, se deduce inmediatamente de la figura 21.

$$\operatorname{tg} V = \frac{h\, d\epsilon}{dh} = \frac{h}{AB}$$

Como AB es comprendido entre $-h \operatorname{tg} \delta$ i $+h \operatorname{tg} \delta$, el ángulo V queda comprendido entre $90-\delta$ i $90+\delta$; cada vez que AB es igual a cero, el ángulo V es igual a $90°$; como h no puede ser nunca nulo, se ve qué, si se desarrolla el cono de precesion sobre un plano, el desarrollo de la podar de la superficie de rodadura será una especie de sinusoide.

Fig. 22



A cada momento el plano tanjente al cono de precesiones el plano de los ejes G i E.

CASO DEL MOVIMIENTO DE POINSOT

Polhodie i herpolodie

La *polhodie* es el lugar jeométrico, sobre el elipsoide, de los puntos de contacto del elipsoide con el plano de rodadura i la *herpolhodie* es el lugar jeométrico de los puntos de contacto en el plano de rodadura.

La consideracion de los polhodies esplica mui claramente las condiciones de estabilidad del movimiento de rotacion. Busquemos las proyeccciones de una polhodie sobre los tres planos principales.

Sea

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

la ecuacion del elipsoide, los puntos de una polhodie satisfarán a esta ecuacion i a la siguiente

$$\frac{1}{h^2} = A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2$$

h es la distancia constante del centro del elip oide al plano tanjente. Para fijar las ideas, supondremos

$$A < B < C$$

La proyeccion de la polhodie sobre el plano XOY tendrá por ecuacion

$$A(C-A)x^2 + B(C-B)y^2 = G - \frac{1}{h^2}$$

Es una elipse i ésta tiende hácia un punto cuando $G - \frac{1}{h^2}$ tiende hácia cero; G es entónces el momento principal *máximo.*

La proyeccion sobre YOZ es

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)Z^2 = \frac{1}{h^2} - A$$

Es todavía una elipse i ésta tiende hácia un punto cuando $\frac{1}{h^2} - A$ tiende hácia cero; A es entónces el momento principal *mínimo.*

La proyeccion sobre XOZ es

$$A(B-A)x^2 - C(C-B)z^2 = B - \frac{1}{h^2}$$

Es una hiperbola i, cuando $B-\frac{1}{h^2}$ tiende hácia cero, la hipérbola tiende hácia sus asintotas

$$A(B-A)x^2-C(C-B)z^2=0$$

La polhodie es entónces la interseccion del elipsoide con dos planos que pasan por el *eje medio.*

En la figura 22 hemos dibujado una serie de polhodies; las condiciones de estabilidad son entónces evidentes.

La *herpolhodie* es una curva comprendida entre dos circunferencias a las cuales es alternativamente tanjente; en efecto, sea r la distancia de un punto de la herpolhodie al pié de la perpendicular bajada desde el centro sobre el plano de rodadura, se tiene

$$r^2=x^2+y^2+z^2-h^2$$

Los máximos i mínimos de r satisfacen por consiguiente a la relacion

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$$

Se tiene ademas

$$Ax\,dx+By\,dy+Cz\,dz=0$$

$$A^2x\,dx+B^2y\,dy+C^2z\,dz=0$$

Luego, si se elimina dx, dy, dz

(9) $$xyz(B-A)(C-B)(A-C)=0$$

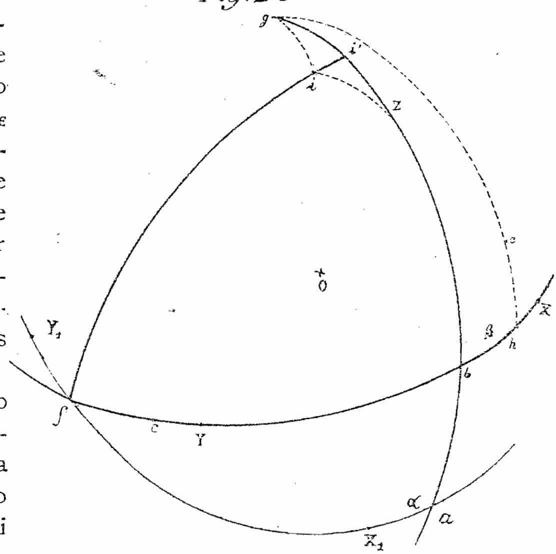
De ahí se deduce que los máximos o mínimos de r corresponden a los puntos de contacto situados en los planos principales del elipsoide. En cada herpolhodie determinada, dos secciones principales pueden solo estar tanjentes al plano de rodadura i, cada vez que la misma seccion principal es tanjente, el valor de r es evidentemente el mismo, luego habrá solo, en cada herpolhodie, un máximo i un mínimo de r. Esto demuestra precisamente que la herpolhodie queda comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Si el elipsoide es de revolucion, las dos circunferencias se confunden una con la otra i con la herpolhodie; la relacion (9) es, en efecto, satisfecha idénticamente para todos los valores de x, y, z; por lo demas, es evidente, *a priori*, que, en este caso, las polhodies i herpolhodies son circunferencias.

MOVIMIENTO RELATIVO DEL ELIPSOIDE DE INERCIA RESPECTO DEL PLANO INSTANTÁNEO DE RODADURA

El movimiento elemental relativo del elipsoide de inercia, respecto del plano instantáneo de rotacion es la resultante del movimiento elemental absoluto (rotacion $\omega\, dt$ al rededor del eje instantáneo de rotacion) i de un movimiento elemental igual i de sentido contrario a la rotacion $d\epsilon$ del plano de rodadura; se sabe que esta rotacion se efectúa al rededor de una recta perpendicular al plano de los dos ejes G i E.

Fig. 23



Sea O el punto fijo; consideremos (fig. 23) una esfera, de centro O i de radio uno i sean, sobre esta esfera, X_1, Y_1, Z_1 las trazas de los ejes principales de inercia; g, i, e las trazas de los ejes G, ω, E. El plano instantáneo de rodadura será paralelo al círculo máximo XY, de polo g. Supondremos que OX, OY son dos ejes rectangulares ligados al plano de rodadura.

Trazemos los arcos de círculo máximo gZ_1, ge, $X_1 Y_1$ i sean, Δ el ángulo gZ_1 de los ejes G i OZ_1, $\beta = Xb$ i $\alpha = aX_1$ los ángulos de los OX i OX_1 con el plano GOZ_1; los tres ángulos Δ, β, α definen completamente la posicion del elipsoide de inercia respecto del plano instantáneo de rodadura; buscaremos, por consiguiente, como varian estos ángulos por efecto de las rotaciones $\omega\, dt$ i $-d\epsilon$.

Rotacion $\omega\, dt$

Descompongamos la rotacion ω en tres componentes g', z', f' dirijidas segun las direcciones Og, OZ_1 i Of (f es la interseccion de los círculos máximos XY i $X_1\ Y_1$ o el polo de gZ_1); la primera componente g' hace variar solo el ángulo β, la segunda z' el ángulo α i la tercera f' el ángulo Δ. Para determinar sus valores, tracemos el círculo máximo fi i sea i' su interseccion con gZ_1; la rotacion ω se descompondrá primero en dos componentes f' i ω' dirijidas segun Of i Oi' i se tiene

$$f' = \omega \operatorname{sen} ii'$$

$$\omega' = \omega \cos ii'$$

En seguida, la rotacion ω' se descompone en otras dos g' i z', dirijidas segun Og i Oz_1; luego

$$\frac{g'}{\operatorname{sen} i' Z_1} = \frac{z'}{\operatorname{sen}(\Delta - i' Z_1)} = \frac{\omega}{\operatorname{sen} \Delta}$$

En resúmen se tiene

$$f' = \omega \operatorname{sen} ii'$$

$$g' = \omega \frac{\cos ii' \operatorname{sen} i' z_1}{\operatorname{sen} \Delta}$$

$$z' = \omega \frac{\cos ii' \operatorname{sen}(\Delta - i' z_1)}{\operatorname{sen} \Delta}$$

Los ángulos ii', $i'Z_1$ pueden espresarse en funcion de Δ i α; sean en efecto x_1, y_1, z_1 las coordenadas de g respecto del sistema de los tres ejes principales de inercia i $x'_1\ y'_1\ z'_1$ las de i, se tiene

$$\frac{x_1}{Ap} = \frac{y_1}{Bq} = \frac{z_1}{Cr} = \frac{1}{G}$$

$$\frac{x'_1}{p} = \frac{y'_1}{q} = \frac{z'_1}{r} = \frac{1}{\omega}$$

Luego

$$x'_1 = \frac{G}{\omega}\ \frac{x_1}{A}$$

$$y'_1 = \frac{G}{\omega}\ \frac{y_1}{B}$$

$$z'_1 = \frac{G}{\omega}\ \frac{z_1}{C}$$

Por otra parte se tiene, en la figura

$$x_1 = -\operatorname{sen} \Delta \cos \alpha \qquad x'_1 \operatorname{sen} \alpha + y'_1 \cos \alpha = \operatorname{sen} ii'$$

$$y_1 = \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \alpha \qquad -x'_1 \cos \alpha + y'_1 \operatorname{sen} \alpha = \cos ii' \operatorname{sen} i' z_1$$

$$z_1 = \cos \Delta \qquad z'_1 = \cos ii' \cos i' z_1$$

Luego

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} ii' &= \frac{G}{\omega}\left(\frac{x_1 \operatorname{sen} \alpha}{A} + \frac{y_1 \cos \alpha}{B}\right) \\ &= \frac{G}{\omega} \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) \\ \cos ii' \operatorname{sen} i' z &= \frac{G}{\omega}\left(-\frac{x_1 \cos \alpha}{A} + \frac{y_1 \operatorname{sen} \alpha}{B}\right) \\ &= \frac{G}{\omega} \operatorname{sen} \Delta \left(\frac{\cos^2 \alpha}{A} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B}\right) \\ \cos ii' \cos i' z_1 &= \frac{G}{\omega}\ \frac{Z_1}{C} = \frac{G}{\omega}\ \frac{\cos \Delta}{C} \end{aligned} \right.$$

Finalmente

$$f' = G \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} a \cos a \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)$$

$$g' = G \left(\frac{\cos^2 a}{A} + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{B} \right)$$

$$z' = G \cos \Delta \left(\frac{1}{C} - \frac{\cos^2 a}{A} - \frac{\operatorname{sen}^2 a}{B} \right)$$

De las fórmulas anteriores se deducen algunas relaciones útiles.

Se tiene, en primer lugar

$$\frac{x_1}{Ap} = \frac{y_1}{Bq} = \frac{z_1}{Cr} = \frac{1}{G} = \frac{\sqrt{\frac{x^2_1}{A} + \frac{y^2_1}{B} + \frac{z^2_1}{C}}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}$$

Luego

$$\frac{x^2_1}{A} + \frac{y^2_1}{B} + \frac{z^2_1}{C} = \frac{H}{G^2} = h^2$$

O bien

$$(7) \qquad h^2 = \operatorname{sen}^2 \Delta \left(\frac{\cos^2 a}{A} + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{B} \right) + \frac{\cos^2 \Delta}{C}$$

Sea tambien Δ' el ángulo $i\,OZ_1$ i u el ángulo $i\,Z_1 g$ se tiene

$$\operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} ii'$$

$$\operatorname{sen} \Delta' \cos u = \cos ii' \operatorname{sen} i'z_1$$

$$\cos \Delta' = \cos ii' \cos i'z_1$$

Luego, segun (6)

$$(8) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \Delta' \operatorname{sen} u = C \operatorname{sen} a \cos a \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \operatorname{tg} \Delta \\ \operatorname{tg} \Delta' \cos u = C \left(\frac{\cos^2 a}{A} + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{B} \right) \operatorname{tg} \Delta \end{cases}$$

Rotacion $-d\epsilon$

La rotacion $-d\epsilon$, se efectúa al rededor de una recta del plano de rodadura i esta rotacion puede reemplazarse por una rotacion igual al rededor de un eje OC, perpendicular al plano GOE, i por una traslacion; esta traslacion no hace variar los ángulos, luego no cambiará tampoco los ángulos Δ, β, α.

La rotacion $-d\epsilon$ tiene ahora su eje dirijido segun OC; sean g'', z'', f'' sus tres componentes segun las direcciones Og, Oz, Of; descompondremos primero la rotacion considerada en dos componentes f'' i b'', dirijidos segun Of i Ob.

Sea (fig. 23) σ el ángulo Xh de los planos GOX, GOE se tendrá

$$f'' = -\frac{d\epsilon}{dt}\cos(\beta-\sigma)$$

$$b'' = -\frac{d\epsilon}{dt}\operatorname{sen}(\beta-\sigma)$$

En seguida, b'' se descompone en las dos rotaciones z'' i g'' i se tiene

$$z'' = \frac{b''}{\operatorname{sen}\Delta} = -\frac{d\epsilon}{dt}\,\frac{\operatorname{sen}(\beta-\sigma)}{\operatorname{sen}\Delta}$$

$$g'' = -\frac{b''}{tg\,\Delta} = \frac{d\epsilon}{dt}\,\frac{\operatorname{sen}(\beta-\sigma)}{tg\,\Delta}$$

Variacion de los ángulos Δ, β, α

Segun lo que se ha esplicado mas arriba, se tendrá, durante el tiempo dt:

$$d\,\Delta = f'\,dt + f''\,dt$$

$$d\,\beta = g'\,dt + g''\,dt$$

$$d\,\alpha = z'\,dt + z''\,dt$$

Por consiguiente, segun los valores obtenidos mas arriba,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= G \text{ sen } \Delta\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right) \text{sen } \alpha \cos \alpha - \frac{d\epsilon}{dt}\cos(\beta-\sigma) \\ \frac{d\beta}{dt} &= G\left(\frac{\cos^2 \alpha}{A}+\frac{\text{sen}^2 \alpha}{B}\right)+\frac{d\epsilon}{dt}\,\frac{\text{sen }(\beta-\sigma)}{tg\,\Delta} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= G \cos \Delta\left(\frac{1}{C}-\frac{\cos^2 \alpha}{A}-\frac{\text{sen}^2 \alpha}{B}\right) \\ &\qquad -\frac{d\epsilon}{dt}\,\frac{\text{sen }(\beta-\sigma)}{\text{sen }\Delta} \end{aligned}\right.$$

La última puede reemplazarse por la siguiente

$$10 \quad \frac{d\beta}{dt}+\cos\Delta\,\frac{d\alpha}{dt} = G\left\{\frac{\cos^2 \Delta}{C}+\text{sen}^2 \Delta\left(\frac{\cos^2\alpha}{A}+\frac{\text{sen}^2\alpha}{B}\right)\right\}$$

O bien segun (7)

$$(10 \text{ bis}) \qquad \frac{d\beta}{dt}+\cos\Delta\,\frac{d\alpha}{dt} = G\,h^2$$

Caso del movimieuto de Poinsot

En este caso G es constante i $\frac{d\epsilon}{dt}$ igual a cero; se tiene por consiguiente, segun (9)

$$\frac{d\Delta}{dt} = G \text{ sen } \Delta\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right) \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = G \cos \Delta\left(\frac{1}{C}-\frac{\cos^2 \alpha}{A}-\frac{\text{sen}^2 \alpha}{B}\right)$$

De ahí se deduce

$$\frac{\cos\Delta\,d\Delta}{\text{sen }\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\text{sen } \alpha \cos \alpha}{\frac{1}{C}-\frac{\cos^2\alpha}{A}-\frac{\text{sen}^2\alpha}{B}}$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 \Delta \left(\frac{1}{C} - \frac{\cos^2 \alpha}{A} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B} \right) = \text{const.}$$

El primer miembro es precisamente segun (7) el valor de $\frac{1}{C} h^2$; luego se averigua que la distancia h es constante.

Se puede ahora espresar α en funcion de Δ i h i el valor de $\frac{d\Delta}{dt}$ se convierte en el siguiente.

(11) $$\operatorname{sen} \Delta \frac{d\Delta}{dt}$$

$$= \pm G \sqrt{\left(h^2 - \frac{\cos^2 \Delta}{C} - \frac{\operatorname{sen}^2 \Delta}{A} \right) \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \Delta}{B} + \frac{\cos^2 \Delta}{C} - h^2 \right)}$$

Se ve que cos Δ se espresa, en funcion de t, por medio de una funcion elíptica.

Examinaremos el caso en que h es mui próximo del eje principal de inercia, dirijido segun OZ_1; se tiene

$$h^2 - \frac{1}{C} = \operatorname{sen}^2 \Delta \left[\cos^2 \alpha \left[\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right] + \operatorname{sen}^2 \alpha \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right] \right]$$

1.° Si el momento principal C es el mayor o el menor de los tres, la paréntesis tiene, cualquiera que sea α, un valor de signo constante, comprendido entre $\frac{1}{A} - \frac{1}{C}$ i $\frac{1}{B} - \frac{1}{C}$; luego si $h^2 - \frac{1}{C}$ tiende hácia cero es necesario que Δ tienda hácia cero; en otros términos sen$^2 \Delta$ es infinitamente pequeño del mismo órden que $h^2 - \frac{1}{C}$; así, en el caso considerado los ejes OG i OZ_1 quedan siempre mui próximos uno del otro, el movimiento de rotacion es *estable.*

2.° Si el momento principal C es comprendido entre A i B, los paréntesis que multiplica sen$^2 \Delta$ puede tomar valores tan pequeños como se quiere para valores convenientes de α, luego

$h^2 - \frac{1}{C}$ puede tender hácia cero sin que, por esto, sen Δ tienda hácia cero.

Examinemos, en particular, el caso en que $h^2 - \frac{1}{C}$ es igual a cero. La fórmula (11) da entónces

$$\operatorname{sen} \Delta \frac{d\Delta}{dt} = \pm G \operatorname{sen}^2 \Delta \sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)}$$

Si el momento C es comprendido entre A i B se puede hacer

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{2}{C}\right)} = \frac{K}{C}$$

Entónces

$$\frac{d\Delta}{\operatorname{sen} \Delta} = \frac{KG}{C} dt$$

Luego

$$tg \frac{\Delta}{2} = tg \frac{\Delta_0}{2} e^{\frac{KGt}{C}}$$

Se ve que ángulo Δ tiende asintóticamente hácia cero o 180° segun el signo del coeficiente de t.

Se tiene tambien, en este caso,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{G}{C}$$

Así el ángulo α es constante; su valor es, en efecto, determinado por la condicion

$$\frac{\cos^2 \alpha}{A} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B} = \frac{1}{C}$$

A. OBRECHT.

(Continuará)