ESTUDIOS SOBRE LA TEORÍA JEOMÉTRICA
DE LAS FUNCIONES

(Conclusion)

Antes de discutir la fórmula jeneral

$$(a+ib)^{c+id}=u+iv$$

séanos permitido tratar del logaritmo natural de los números. Entiéndese por logaritmo natural de un número complejo $a+ib$ aquel número $x+iy$ que tiene la propiedad de satisfacer a la ecuacion siguiente:

$$e^{x+iy}=a+ib,$$

i lo denotaremos, en adelante, por el símbolo

$$x+iy=l(a+ib)$$

Para determinar las partes real e imajinaria del logaritmo pongamos:

$$a+ib=r(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi),$$

de manera que tenemos:

$$e^{x}(\cos y+i\operatorname{sen}y)=r(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi).$$

Esta ecuacion es equivalente al sistema

$$e^{x}\cos y=r\cos\phi$$

$$e^{x}\operatorname{sen}y=r\operatorname{sen}\phi,$$

cuyas soluciones son:

$$x=l(r)\qquad,\qquad y=\phi\pm 2k\pi.$$

Pero, considerando que

$$\phi=\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a},\qquad\text{en caso de que}\qquad a>0$$

i $$\phi=\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a}+\pi,\ \text{en caso de que } a<0,$$

miéntras $$r=+\sqrt{a^2+b^2},$$

tenemos que:

$$l(a+ib)=l(+\sqrt{a^2+b^2})+i\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a}\pm 2ik\pi\ ,\ \text{para } a>0$$

i

$$l(a+ib)=l(+\sqrt{a^2+b^2})+i\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a}\pm i(2k+1)\pi\ ,\ \text{para } a<0$$

fórmulas en que k puede tomar cada valor entero i positivo desde cero en adelante.

De estas fórmulas resulta que el logaritmo de un número cualquiera con respecto a la base e tiene un número infinito de valores que se diferencian en múltiplos de $2\,i\,\pi$.

A $k=0$ corresponde el valor mas sencillo del logaritmo. Un número real i positivo tiene un valor real de su logaritmo que se determina poniendo $k=0$, miéntras los números reales i negativos tienen todos sus logaritmos complejos. Relacionando las últimas igualdades con la definicion anterior de las potencias de base real, deducimos que el cálculo con logaritmos de números complejos obedece a las mismas reglas que se han establecido para los valores reales de los logaritmos de números reales.

Sentada la definicion anterior del logaritmo, es fácil determinar las partes real e imajinaria de la potencia

$$(a+ib)^{c+id}$$

Tenemos:

$$a+ib=e^{l(a+ib)}$$

i, por esto:

$$(a+ib)^{e+id}=\left[e^{l(a+ib)}\right]^{e+id}$$

Poniendo $\quad l(a+ib)=x+i(y\pm 2k\pi)$,

en que $\quad x=l(+\sqrt{a^2+b^2})$

$$e \qquad y=\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a} \quad \text{o} \quad =\operatorname{arc\,tanj}\frac{b}{a}+\pi ,$$

segun que a sea positivo o negativo, tenemos que:

$$(a+ib)^{c+id}=\left[e^{x+i(y\pm 2k\pi)}\right]^{c+id}$$

$$=e^{xc-(y\pm 2k\pi)d+i(xd+(y\pm 2k\pi)c)}$$

$$=e^{xc-(y\pm 2k\pi)d}\left[\cos(xd+(y\pm 2k\pi)c)\right.$$

$$\left.+i\operatorname{sen}(xd+(y\pm 2k\pi)c)\right]$$

Tanto el módulo como el argumento de este número tienen, en jeneral, un número infinito de valores, puesto que k es susceptible de cualquier valor entero i positivo. A $k=0$ corresponde el valor mas sencillo de la potencia que es

$$(a+ib)^{c+id}=e^{xc-yd}[\cos(xd+yc)+i\,\mathrm{sen}\,(xd+yc)]$$

Poniendo $d=0$, resulta la definicion que ántes hemos dado de una potencia de base compleja i de esponente real.

Si, a un mismo tiempo, desaparecen a i b , la definicion anterior de la potencia es inadmisible, puesto que, en este caso, x tiene un valor infinito e y un valor del todo indeterminado. De la definicion anterior se desprende ademas que la igualdad:

$$e^{c+id}=e^{c}(\cos d+i\,\mathrm{sen}\,d)$$

solo representa el valor mas sencillo de la potencia, miéntras que su valor jeneral es:

$$e^{c+id}=e^{e\pm 2k\pi d}[\cos(d\pm 2k\pi c)+i\,\mathrm{sen}\,(d\pm 2k\pi c)]$$

Sin embargo, es de advertir que se ha convenido en que, por valor de la potencia e^{c+id}, se entienda siempre el valor mas sencillo que corresponde a $k=0$.

Réstanos determinar el valor $u+iv$ del logaritmo de $a+ib$ con respecto a la base $c+id$.

Partiendo de la definicion

$$(c+id)^{u+iv}=a+ib\ ,$$

i poniendo

$$a+ib=e^{x+i(y\pm 2m\pi)}$$

$$c+id=e^{s+i(t\pm 2n\pi)}$$

resulta que los valores de u i v son las soluciones de las dos ecuaciones siguientes del primer grado:

$$s\,u-(t\pm 2\,n\,\pi)\,v=x$$

$$(t\pm 2\,n\,\pi)\,u\;+\qquad s\,v=y\pm 2\,m\,\pi\;,$$

de donde se desprende:

$$u=\frac{s\,x+(y\pm 2\,m\,\pi)\,(t\pm 2\,n\,\pi)}{s^2+(t\pm 2\,n\,\pi)^2}$$

$$v=\frac{s\,(y\pm 2\,m\,\pi)-x\,(t\pm 2\,n\,\pi)}{s^2+(t\pm 2\,n\,\pi)^2}$$

Tambien en este caso tenemos que el logaritmo de un número complejo con respecto a una base compleja tiene un número infinito de valores de los que el mas sencillo corresponde a $m=n=0$.

Hemos demostrado, en este último capítulo, que las siete primeras operaciones aljebráicas, ejecutadas con datos complejos, producen resultados complejos. En cuanto a las funciones trigonométricas i ciclométricas, las investigaciones anteriores han dejado ver las íntimas relaciones que ellas tienen con las funciones esponenciales i logarítmicas i, por esto, creemos escusado demostrar que se descomponen tambien en una parte real i otra imajinaria en caso de que sus argumentos fueran complejos. Ahora bien, todas las funciones superiores de que trata la teoría de las funciones, admiten, ademas de otras, una definicion por medio de series de un número infinito de términos i de la forma

$$a_0+a_1\,z+a_2\,z^2+\ldots\ldots+a_n\,z^n+\ldots.$$

que deben ser de una converjencia incondicional para poder usarlas, sin restriccion, en el cálculo. Dado esto, es fácil hacer ver que estas series constan de una parte real i otra imajinaria en caso de que los coeficientes a o el argumento z o ámbos fueran complejos.

Seria largo e inútil discutir, en este lugar, los procedimientos que sirven para desarrollar las series que corresponden a las funciones principales; bástenos con las observaciones hechas a este respecto i demos por demostrada la tercera propiedad de nuestro sistema numérico, la de ser *perfecto.*

4.° *No puede haber sistema superior que comprenda nuestro sistema numérico como caso especial.*—Ántes de entrar en esta demostracion, permítasenos decir algunas palabras sobre los dos sistemas superiores de números complejos que hoi dia son los mas conocidos, los números cuaternos i los números alternos, inventados los primeros por el matemático ingles Hamilton (1), los segundos por el aleman H. Grassmann (2). Aunque no puede negarse que en la teoría de los números enteros, ya ántes se habian empleado números complejos de la forma

$$a = a_1 A_1 + a_2 A_2 + - \ldots\ldots + a_n A_n \ ,$$

siendo a_1, a_2, ... a_n números enteros i las cantidades A_1, A_2, ... A_n las raices de la ecuacion $x^n - 1 = 0$, sin embargo, el motivo principal para introducir tales números en el cálculo

(1) Hamilton, Lectures on Quaternions, 1853, i Elementos of Quaternions, 1866. La primera noticia de su invencion, la dió este autor en una correspondencia dirijida a la Academia de Dublin, en 1844. Entre los matemáticos que se han ocupado en investigaciones análogas, es de mencionar Scheffler que publicó en 1846 una obra intitulada «Sobre la relacion entre la aritmética i la jeometría» seguida mas tarde del «Cálculo de situacion» i de las «Cantidades polidimensionales», en 1852, resp. 1880. De los autores que recientemente han tratado de estos números, especialmente con relacion a la jeometría an-euclidiana, hé aquí los principales: F. Klein, «Sobre la jeometria an-euclidiana», Mathematische Annalen, Bd. 4 u. 6 (1871, 1872); «Estudio comparativo sobre las investigaciones jeométricas modernas», Erlangen 1872 (traducido al italiano por Gino Fani, Annali di Matematica, tomo 17); «Sobre las funciones jenerales i su representacion por curvas aljebráicas», Mathematische Annalen, Bd. 22.

Sir R. S. Ball: On the theory of the Content, Transactions of the R. Irish Academy, vol. 29, 1889.

Clifford: Preliminary sketoh of biquaternions, Mathematical Society, London, vol. 4, 1873. Véase ademas una coleccion de estudios matemáticos del mismo autor intitulada Mathematical Papers, London, Macmillan 1882, números XXVI, XLI, XLII, XLIV.

(2) H. Grassmann. La ciencia de las cantidades estensas o teoría de la

debe buscarse en consideraciones jeométricas i en la ampliacion de nuestras ideas sobre el espacio. La teoría de los números complejos de la forma $a+ib$, habia sido aplicada con gran ventaja a la jeometría plana, i se trataba de encontrar sistemas de números superiores que desempeñaran igual papel en la jeometría de tres dimensiones, necesidad que se hacia sentir tanto mas cuanto que la jeometría proyectiva progresaba en el sentido de la an-euclidiana. I, en efecto, las tres unidades i, j, k, de los números cuaternos de Hamilton significan unidades aplicadas sobre tres ejes ortogonales que parten de un punto 0, i, de una manera análoga, se esplican tambien las unidades de los números alternos de Grassmann, a pesar de que éste los haya usado preferentemente para desarrollar la teoría de las determinantes.

Nos reservamos para otra ocasion hacer un estudio comparativo entre la aplicacion de los números complejos i de los números cuaternos i alternos a la jeometría; por ahora nos contentamos con haber hecho una indicacion sobre el oríjen de estos números. Ademas de esto, es evidente que la introduccion de los números superiores no ha obedecido a una necesidad imprescindible, puesto que se acaba de demostrar que el sistema jeneral de los números complejos es perfecto, pero, por el otro lado, es tambien evidente que nada nos impide construir sistemas superiores de propiedades cualesquiera i operar con ellos, i que la aplicacion que estos números, sobre todo los cuaternos, han encontrado en la jeometría proyectiva i en mecánica, justifica su introduccion i demuestra su utilidad.

Debiendo estos sistemas su oríjen a fines determinados, sus leyes naturalmente debian conformarse con lo que se habia propuesto conseguir. I es característico para aquellos sistemas que todos han suprimido una propiedad fundamental de nuestro sistema jeneral, la de ser conmutativo, miéntras han conservado la de ser asociativo i, por lo mas, tambien la de ser distributivo (1). Atribuyo este hecho a la circunstancia de que todos

estension, etc., 1844. Véase ademas: A. Cayley, on multiple aljebra. Quarterly Journal of Mathematics, 1887.

Schröder: Sobre los elementos formales del áljebra absoluta, 1874.

(1) En el sistema de Scheffler la lei distributiva $a(b+c)=ab+ac$ no subsiste en todos los casos.

los matemáticos que se proponian dar mas ensanche a nuestro sistema de números, haciendo mas fácil su aplicacion a la jeometría moderna, tropezaban con la dificultad que presenta el undécimo axioma de Euclídes que dice que dos rectas se cortan por aquel lado en que la suma de dos ángulos opuestos por el vértice es menor que dos ángulos rectos. Segun este axioma deben distinguirse los productos de dos rectos, segun que ellas comprendan un ángulo agudo u obtuso lo que trae la consecuencia de que la multiplicacion no puede ser una operacion conmutativa, si se la quiere aplicar a esta clase de investigaciones. De manera que, siendo q i q_1 dos números pertenecientes a uno de estos sistemas, tenemos que qq_1 no es igual a $q_1 . q$.

Esta propiedad de la multiplicacion de no ser conmutativa, se estiende tambien a los productos de las unidades que se adoptan, i de ahí se desprende que, al construir un sistema semejante, es arbitrario si se quiere conservar la propiedad de nuestro sistema jeneral de ser perfecto o nó. En efecto, denotando por e_1, e_2, e_3, las tres unidades de un número $x e_1 + y e_2 + + z e_3$, la multiplicacion de dos de estos números produce el resultado siguiente:

$$(x e_1 + y e_2 + z e_3)(x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3)$$

$$= x x_1 e_1{}^2 + x_1 y e_2 e_1 + x_1 z e_3 e_1$$

$$+ x y_1 e_1 e_2 + y y_1 e_2{}^2 + y_1 z e_3 e_2 + x z_1 e_1 e_3 + y z_1 e_2 e_3 + z z_1 e_3{}^2.$$

Ahora bien, $e_2 e_1$ no es igual a $e_1 e_2$, i podemos fijar arbitrariamente que $e_2 e_1 = -e_1 e_2$ sea igual a una de las unidades e_1, e_2, e_3, o nó. Veremos que el sistema de los números cuaternos es perfecto, miéntras que los números de Grassmann no constituyen un sistema de esta naturaleza.

Se comprende que un áljebra que se funda en semejantes principios, debe tener teoremas mui diferentes de los del áljebra comun, i para no perdernos en jeneralidades, vamos a dar un ejemplo para cada uno de los dos sistemas en cuestion, el de Hamilton i el de Grassmann.

El tipo de los números cuaternos es

$$Q = w + ix + jy + kz\,,$$

i las unidades i, j, k satisfacen a las condiciones siguientes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,,$$
$$jk = i\,,\ kj = -i$$
$$ki = j\,,\ ik = -j\,,$$
$$ij = k\,,\ ji = -k$$

condiciones que nos dicen que la multiplicacion no es conmutativa, pero que el sistema es perfecto, puesto que los productos de las unidades se reducen a las unidades i, j, k (1).

Sentado esto, el producto de dos números cuaternos

$$Q = w + ix + ji + kz$$

i

$$Q_1 = w_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1$$

tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q \,.\, Q^1 = {} & ww_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 \\ & + i(wx_1 + xw_1 + yz_1 - y_1 z) \\ & + j(wy_1 + yw_1 + zx_1 - z_1 x) \\ & + k(wz_1 + zw_1 + xy_1 - yx_1)\,, \end{aligned}$$

es decir, es un número cuaterno, pero es evidente que el producto $Q_1 . Q$ tiene un valor distinto, que resulta del anterior cambiando los signos de los dos últimos términos de los coeficientes de i, j, k.

En sus lecciones sobre la Teoría de las funciones, el célebre

---

(1) Obsérvese que la unidad cuaterna i no es idéntica con la i compleja que es igual a $\sqrt{\nu 1}$.

profesor F. Klein, da el ejemplo siguiente de un teorema aljebráico del sistema de los números cuaternos: Tenemos

$$Q^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + i \,.\, 2wx + j \,.\, 2wy + k \,.\, 2wz$$

i

$$\begin{aligned} Q^3 = & \; w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) \\ & + i \,.\, x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ & + j \,.\, y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ & + k \,.\, z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) \end{aligned}$$

Ahora bien, multiplicando el número cuaterno Q por $3w^2 - x^2 - y^2 - z^2$ i restando de este producto la espresion $2w.(w^2 + x^2 + y^2 + z^2$, tenemos la relacion:

$$(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) \,.\, Q - 2w(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) = Q^3 \,.$$

Esta fórmula nos dice que todo número cuaterno satisface a una ecuacion del tercer grado que tiene dos coeficientes que son funciones de las mismas cuatro cantidades w, x, y, z de que depende el número Q. De ahí se deduce que un número infinito de valores de Q satisfacen a esta ecuacion, o en otros términos: *en el sistema de los números cuaternos, una ecuacion del tercer grado tiene un número infinito de raices.*

Este teorema, aparentemente paradojal, efectivamente no lo puede ser, puesto que la multiplicacion de números cuaternos carece de la propiedad fundamental de ser conmutativa.

La teoría de los números de Grassmann, publicada en 1844, ha quedado desconocida casi completamente hasta mediados del 8.° decenio de este siglo, de manera que, a pesar de los grandes elojios dispensados a esta obra por Grauss, Grunert i Moebius, este último pudo escribir en 1853 "que Bretschneider de Gotha era el único matemático que le habia asegurado haber leido toda la obra de Grassmann (1).

(1) Karl Fink, Geschichte der Elementar-Mathematik, Tuebinguen, 1890.

Estos números a que Grassmann da el nombre de *alternos* tienen la forma:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n ,$$

siendo las cantidades u_i las unidades superiores de su sistema. La multiplicacion ejecutada con números de esta especie, tampoco es conmutativa, puesto que Grassmann establece las siguientes reglas para los productos de las unidades:

$$u_i u_k = -u_k u_i , \quad u_i{}^2 = 0$$

El producto de dos de estos números es un número de $\frac{n(n-1)}{2}$ términos, pero no es de la misma especie que los factores, puesto que los productos de dos unidades no se reducen a las unidades de los factores.

Si se forma un producto de n de estos números, los productos de las unidades constan de n factores, pero el producto $u_1 . u_2 . \dots\dots . u_n$ es el único que no desaparece. Pues todos los demas productos contienen al ménos un factor de la forma $u_i{}^2$ que, como acabamos de ver, es igual a cero.

La teoría de estos números nos permite dar una forma mui compendiosa a la teoría de las determinantes. Multipliquemos, por ejemplo, el número $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ por el otro $b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$. El producto es:

$$u_2 u_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + u_3 u_1 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + u_1 u_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Se observa que los coeficientes de las unidades son las determinantes cuadradas que se desprenden de la *matrix:*

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix},$$

suprimiendo sucesivamente cada una de las columnas verticales.

Multiplicando el producto anterior por el número $c_1 u_1 + c_2 u_2 +$
$+ c_3 u_3$,
i tomando en cuenta que, por ejemplo,

$$u_2 u_3{}_1 = -u_1 u_3 u_2 = +u_1 u_2 u_3 ,$$

miéntras que

$$u_3 u_1^2 = 0 \text{, etc.,}$$

obtenemos el resultado siguiente:

$$u_1 u_2 u_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Despues de estas someras consideraciones, pasamos a la demostracion de que no puede existir ningun sistema superior que comprenda nuestro sistema de los números reales i complejos como caso especial. En esta parte, nos atendremos a la obra ya citada de Hankel.

Para que un sistema superior comprenda nuestro sistema numérico como caso especial, seria necesario que tuviera, ademas de las unidades 1 *e* $i = +\sqrt{-1}$ de nuestro sistema, $n-2$ unidades ajenas a éste, o que sus números tuvieran la forma:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n ,$$

siendo $u_1 = 1$, i $u_2 = +\sqrt{-1}$ i las unidades $u_3 u_4, \ldots u_n$ no podrán ser funciones de u_1 i u_2. Ademas, este sistema deberia ser conmutativo i perfecto, es decir, deberia ser:

$$u_i u_k = u_k u_i ,$$

i estos productos funciones lineales de las unidades $u_1, u_2, \ldots$
$\ldots u_n$. Multiplicando, por ejemplo, el número

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

por $A\ u_n$, tendremos los siguientes productos de unidades:

$$u_1 u_n = c_{11} u_1 + c_{12} u_2 + \dots + c_{1n} u_n$$
$$u_2 u_n = c_{21} u_1 + c_{22} u_2 + \dots + c_{2n} u_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n u_n = c_{n1} u_1 + c_{n2} u_2 + \dots + c_{nn} u_n$$

o, pasando los términos del primer miembro al segundo:

$$0 = (c_{11} - u_n) u_1 + c_{12} u_5 + \dots\dots + c_{1n} u_n$$
$$0 = c_{21} u_1 + (c_{22} - u_n) u_2 + \dots + c_{2n} u_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 = c_{n1} u_1 + c_{n2} u_2 + \dots\dots + (c_{nn} - u_n) u_n$$

A este sistema de n ecuaciones, homojéneas i lineales con respecto a las unidades $u_1, u_2, \dots u_n$, i de coeficientes constantes, solo puede satisfacerse en caso de que su determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - u_n, c_{12}, \dots\dots & c_{1n} \\ c_{21}, c_{22} - u_n, \dots\dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots\dots & c_{nn} - u_n \end{vmatrix} = 0$$

Esta determinante representa una ecuacion del grado n con respecto a la unidad u_n. Escribiendo u en lugar de u_n, esta ecuacion tiene la forma:

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_{n-1} u + a_n = 0$$

Ecuaciones análogas podrian deducirse tambien para las unidades $u_3, u_4, \dots u_{n-1}$, de manera que toda unidad superior que queremos que satisfaga a nuestro sistema, debe ser raiz de una ecuacion aljébráica de coeficientes numéricos i del grado n. Ahora bien, toda ecuacion del grado n tiene, en el sistema comun, n raices que pertenecen al mismo sistema numérico. Para que este nuevo sistema obedezca a la misma lei, es preciso que la última ecuacion se pueda escribir en la forma:

$$0=(u-r_1)(u-r_2)\ldots\ldots(u-r_n),$$

denotando por r_i las raices de la ecuacion, raices que son números reales o complejos de la forma $a+ib$. Pero, al principio de esta demostracion hemos sentado que la unidad $u_n=u$ sea ajena a nuestro sistema comun, por lo tanto, no puede ser igual a ninguna de las cantidades r_i. Luego, ninguno de los factores del último producto puede ser igual a cero, i, sin embargo, queremos que el producto desaparezca. Esto, en el lenguaje de nuestra áljebra, es absurdo, luego queda demostrado lo que nos hemos propuesto: *que no puede haber sistema superior que comprenda el sistema de los números reales i complejos de la forma* a+i b, *como caso especial.*

Cumplido nuestro propósito de demostrar que el sistema jeneral de los números reales i complejos de la forma $a+ib$, tiene las propiedades señaladas (páj. 418 del tomo 84 de estos ANALES), creemos haber puesto de manifiesto que representa una entidad que no solamente satisface completamente a las necesidades matemáticas, sino que tampoco admite complementos. En cuanto a los sistemas superiores de que hemos tratado en el último capítulo, podemos repetir que, a pesar de que su estudio es sumamente interesante i su aplicacion a las cuestiones jeométricas mui útil, su introduccion en el cálculo no ha obedecido a una necesidad imprescindible, pero sí que ha facilitado mucho el desarrollo de la jeometría moderna.

DR. RICARDO POENISCH
Profesor del Instituto Nacional