MECÁNICA RACIONAL

PRIMERA PARTE

DEL PUNTO MATERIAL

CAPÍTULO V

PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERJÍA.—TRABAJO DE UNA FUERZA.—FUERZA VIVA.—POTENCIAL

Hasta ahora hemos estudiado cual es el efecto de las impulsiones sobre los puntos materiales sin ocuparnos de la manera como estas impulsiones se enjendran.

La accion de una fuerza sobre un punto material puede compararse a la de un resorte, primitivamente comprimido i que, al estenderse, empuja el punto delante de él. Se dice en jeneral, que un cuerpo o un *medio*, capaz de enjendrar la impulsion, está dotado de enerjía.

Así un resorte comprimido es un cuerpo dotado de enerjía, porque al estenderse puede enjendrar la impulsion; el medio interplanetario, los medios electrizados o magnetizados, son dotados de enerjía porque los cuerpos materiales, situados en estos medios, reciben impulsiones. Los medios dotados de enerjía se llaman *medios activos.*

La *cantidad de enerjía* que posee un cuerpo o un medio está evidentemente en relacion con la cantidad de impulsion que puede enjendrar; asi un resorte comprimido no se puede estender indefinidamente, por consiguiente la cantidad de impulsion que puede enjendrar i la cantidad de enerjía que posee son limitadas.

ENERJÍA POTENCIAL I ENERJÍA CINÉTICA

Los resortes, primitivamente comprimidos, conservan mucho tiempo la misma enerjía, cuando sus dos estremidades conservan una distancia invariable. Podemos, por consiguiente, concebir *resortes teóricos* cuya enerjía permanece rigorosamente *invariable* cuando estan en la imposibilidad de estenderse. Estos resortes no pueden, por consiguiente, enjendrar la impulsion sino cuando se les da la facultad de estenderse.

Si al estenderse, el resorte empuja delante de él un cuerpo inerte, primitivamente en reposo, éste recibirá cierta cantidad de impulsion i tomará cierto movimiento; al mismo tiempo la enerjía del resorte se *gastará.*

Si ahora el cuerpo inerte en movimiento choca con otro en reposo, este último recibirá una impulsion i, a su vez, tomará cierto movimiento; segun esto, el cuerpo inerte en movimiento posee tambien cierta cantidad de enerjía, puesto que ha enjendrado la impulsion.

Sin embargo, las enerjías que poseen el resorte i el cuerpo inerte en movimiento son de naturaleza mui distinta. El cuerpo inerte en movimiento gasta una porcion de su enerjía i enjendra la impulsion en el momento mismo de su contacto con otro cuerpo inerte en reposo; miéntras tanto un resorte que no se puede estender, no enjendra la impulsion apesar de su contacto con un cuerpo inerte; la enjendra solo cuando se le da la facultad de estenderse i hasta este momento su enerjía está *guardada* sin poder gastarse.

Se dice que la enerjía del resorte es *enerjía potencial* i que la enerjía del cuerpo inerte en movimiento es *enerjía cinética.*

PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERJÍA

Los ejemplos considerados mas arriba, hacen comprender que la enerjía es susceptible de medida. Cuando al estenderse, un resorte empuja delante de él un cuerpo inerte en reposo, la enerjía potencial del resorte se gasta i el cuerpo inerte adquiere cierta cantidad de enerjía cinética. Inversamente se puede concebir que un cuerpo inerte en movimiento venga a empujar la estremidad libre de un resorte, el cuerpo gastará su enerjía, cinética i el resorte adquirirá cierta cantidad correspondiente de enerjía potencial.

Se admite que la produccion de cierta cantidad de enerjía cinética o potencial es siempre acompañada de la desaparicion simultánea de una cantidad equivalente de enerjía potencial o cinética. En otros términos, se admite que *la enerjía no se puede ni crear ni destruir.*

Tal es el principio de la conservacion de la enerjía análogo al principio de la conservacion de la materia.

Este principio, como los demas principios fundamentales de la mecánica, no se puede demostrar, pero sus consecuencias estan siempre conformes con la observacion.

FUERZA DE UN RESORTE.—CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN PUNTO MATERIAL

Llamaremos *resorte elemental* un resorte teórico, recto e infinitamente delgado; admitiremos que una de sus estremidades es fijada invariablemente en un punto del sistema de comparacion i que la direccion del eje del resorte es tambien fija respecto del mismo sistema; supondremos ademas que la estremidad móvil es plana i perpendicular al eje del resorte; es evidente entónces que la accion del resorte elemental sobre un punto material tiene la direccion misma del eje del resorte.

Sea un punto material sometido a la accion de n resortes elementales R_1, R_2,... R_n ; si el punto queda en reposo se dice que *las acciones de los n resortes se hacen equilibrio* o bien que *el punto material está en equilibrio bajo la accion de los n resortes.*

Como las dos estremidades de cada resorte permanecen entónces fijas, su enerjía queda siempre la misma i el punto material queda indefinidamente en equilibrio.

Supongamos ahora que se suprime uno de los resortes, R_1 por ejemplo, el punto material tomará cierto movimiento, como si hubiera recibido una impulsion i la impulsion elemental inicial corresponderá a cierta fuerza F_1 perfectamente determinada en magnitud, direccion i sentido. De aquí se deduce que, a cada momento, el punto material, en equilibrio, tiende a dar a la estremidad del resorte R_1, una impulsion $F_1\,dt$; recíprocamente, segun el principio de Newton, el resorte R_1 tiende constantemente a dar al punto material una impulsion igual a $F_1\,dt$ i de sentido contrario.

Diremos que *F_1 es la fuerza del resorte R_1*; esta fuerza tiene evidentemente la misma direccion que el resorte R_1.

El razonamiento hecho con el resorte R_1 puede repetirse de la misma manera con los demas; sean entónces $F_2, F_3 \ldots F_n$ las fuerzas de los resortes $R_2, R_3 \ldots R_n$; podemos decir que el punto material es sometido a cada instante a la accion simultánea de n fuerzas $F_1\ F_2 \ldots F_n$. Cada una de ellas, obrando sola, durante el tiempo dt, daria al punto una impulsion elemental igual al producto de la fuerza por dt i el efecto resultante de los n impulsiones seria equivalente al efecto de una impulsion única, igual a la resultante jeométrica de las primeras. Como el punto material es, por hipótesis, en equilibrio, la impulsion resultante debe ser nula, luego tambien la resultante jeométrica de las n impulsiones o de las fuerzas $F_1, F_2 \ldots F_n$ debe ser nula.

Así, cuando un punto material está en equilibrio bajo la accion de n fuerzas, la resultante jeométrica de estas fuerzas es nula.

Recíprocamente si un punto material es sometido a la accion de n fuerzas cuya resultante jeométrica es nula, este punto está en equilibrio

En efecto, a cada momento, el punto material recibe n impulsiones elementales simultáneas, cuya resultante es nula;

luego, si el punto está en reposo, en el momento considerado, este punto quedará en reposo.

Medida de la enerjía

Sea W la enerjía de un resorte elemental i n la distancia de sus dos estremidades; W es una funcion de n, en efecto W queda constante cuando n queda constante i varia solo cuando n varia. Si n varia de dn, W varia de ΔW i la razon $\frac{\Delta W}{dn}$ debe tender hácia un límite finito i determinado cuando dn tiende hácia cero.

Sea $\frac{dW}{dn}$ este límite, llamaremos dW la *variacion elemental* de la enerjía del resorte; esta variacion es proporcional a dn.

Consideremos ahora p resortes elementales, iguales en magnitud, direccion i sentido i de misma fuerza F; el conjunto de las p resortes equivale a un resorte único de fuerza pF. Una misma variacion dn de la lonjitud de estos resortes equivale, en cada uno de ellos, a una variacion dW de enerjía, la misma para todos; luego la variacion total de enerjía, para el conjunto de los p resortes o para el resorte de fuerza $p\,F$, es igual a pdW. Esto nos indica que, para una misma variacion de la lonjitud de un resorte, la variacion de enerjía es proporcional a la fuerza del resorte.

En resúmen, la variacion dW de la enerjía de un resorte de fuerza F, cuya lonjitud varia de dn, es proporcional a Fdn.

Se elije como unidad de enerjía, la cantidad de que varia la enerjía de un resorte, de fuerza constante igual a la unidad, cuya lonjitud varia de la unidad de lonjitud. Segun esto, la variacion elemental dW de la enerjía de un resorte de fuerza F, cuya lonjitud varia de dn, tiene por medida Fdn.

Ademas, esta variacion es susceptible de un signo; en efecto si F i dn tienen el mismo sentido, la enerjía del resorte disminuye; por consiguiente, se debe escribir

$$(1) \qquad dW = -Fdn$$

De ahí se deduce tambien

$$(2) \qquad F = -\frac{dW}{dn}$$

Trabajo de una fuerza

Cuando un resorte imprime cierta velocidad a un punto material en reposo, se dice que el resorte *trabaja.* La enerjía del resorte es *potencial* i la del punto material, animado de cierta velocidad, es *cinética;* por consiguiente, cuando un resorte trabaja, una parte de su enerjía potencial se trasforma en enerjía cinética.

Sea F la fuerza del resorte considerado; se llama *trabajo* del resorte o trabajo de la fuerza F, durante cierto tiempo t, la cantidad de enerjía potencial que ha sido trasformada en enerjía cinética, durante el tiempo t.

Segun esta definicion, la suma de la enerjía potencial del resorte i del trabajo efectuado por él queda siempre constante. Ademas, segun el principio de la conservacion de la enerjía, el trabajo de la fuerza, durante cierto tiempo, es igual a la cantidad de enerjía cinética que el punto material, sometido a esta fuerza, ha adquirido durante este tiempo.

Sea W la enerjía potencial de un resorte a un momento cualquiera, $\mathfrak{T}$ el trabajo efectuado desde cierto momento oríjen; se tiene por definicion

$$W + \mathfrak{T} = \text{Const.}$$

O bien

$$dW + d\mathfrak{T} = 0 \tag{3}$$

Llamaremos $d\mathfrak{T}$ el trabajo elemental del resorte o de la fuerza correspondiente F; su valor se deduce de las fórmulas (1) i (3) i se tiene

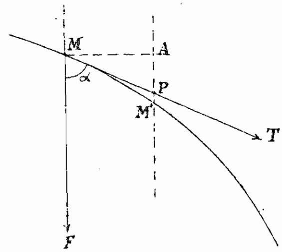
$$d\mathfrak{T} = Fdn$$

Fuerza viva.—Enerjía cinética de un punto material

Sea (fig. 15) M la posicion de un punto material, en cierto momento t; m su masa, v su velocidad i F la fuerza. Durante el tiempo dt, se puede considerar la fuerza F como constante en magnitud, direccion i sentido; luego, durante el mismo tiempo, se puede considerar el punto material como si estuviera sometido a la accion de un resorte elemental, de fuerza F i paralelo a F.

Para obtener la posicion M', del punto material en el momento $t+dt$, se debe, como se ha indicado mas arriba, tomar sobre la tanjente MT a la trayectoria una lonjitud $MP=vdt$ i, sobre una paralela en P, a la fuerza F, una lonjitud

Fig. 15



$$PM'=\frac{1}{2}\frac{F}{m}dt^2.$$

Sea MA una perpendicular, bajada desde M sobre PM' i A su punto de encuentro con la prolongacion de PM', α el ángulo de MT con F; se tiene en la figura

$$AP=vdt\cos\alpha$$

El trabajo elemental $d\mathfrak{T}$ del resorte hipotético que obra en M es igual al producto de la fuerza F por AM' o simplemente al producto de F por AP, pues PM' es de órden de dt^2, se tiene, por consiguiente,

$$d\mathfrak{T}=F\,vdt\cos\alpha \tag{4}$$

El producto $F\,dt\cos\alpha$ es precisamente la impulsion elemental de la fuerza tanjencial i su medida es mdv, luego

$$d\mathfrak{T}=mvdv \tag{5}$$

Las mismas consideraciones se aplican a las posiciones consecutivas del punto móvil; sea entónces v_0 su velocidad a cierto momento oríjen i $\mathfrak{T}$ el trabajo de la fuerza, contado desde el mismo momento hasta el momento t se tiene

(6) $$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\, mv^2 - \tfrac{1}{2}\, mv_0^2$$

El producto mv^2 de la masa de un punto natural por el cuadrado de su velocidad se llama *fuerza viva* del punto; segun esto *cuando una fuerza obra sobre un punto material, el trabajo de la fuerza, durante cierto tiempo, es igual al medio aumento de la fuerza viva del punto material durante el mismo tiempo.*

Se deduce tambien del valor del trabajo que *la enerjía cinética de un punto material tiene por medida la mitad de su fuerza viva.*

Otra espresion del trabajo elemental

La fórmula (4) puede escribirse de la manera siguiente

$$d\,\mathfrak{T} = Fds \cos(F, ds)$$

Luego, *el trabajo elemental de una fuerza es igual al producto de la fuerza por el cambio de lugar de su punto de aplicacion i por el coseno del ángulo que forma la fuerza con el cambio de lugar;* o bien, es igual al producto de la fuerza por la proyeccion del cambio de lugar sobre la direccion de la fuerza o todavía al producto del cambio de lugar por la proyeccion de la fuerza sobre la direccion de este cambio de lugar.

TEOREMA.—*Cuando algunas fuerzas obran simultáneamente sobre un mismo punto material, el trabajo de la resultante es igual a la suma de los trabajos de los componentes.*

En efecto, la proyeccion de la resultante sobre la direccion del cambio de lugar es igual a la suma de las proyecciones de los componentes; sean $F_1\ F_2 \dots F_n$ los n fuerzas simultáneas i R su resultante; designemos por $P^t F$ la proyeccion de una fuerza cualquiera F sobre la direccion del cambio de lugar, tendremos

$$P.^t\, R = P.^t\, F_1 + P.^t\, F_2 + \dots + P^t\, F_n$$

Sea ds es el cambio de lugar; el trabajo elemental de una fuerza F es

$$d\,\mathfrak{T}F = ds\ P.^t\, F$$

Se tiene ahora

$$ds\,P^{t} R = ds\,P^{t} F_1 + ds\,P^{t} F_2 + \dots + ds\,P^{t} F_n$$

Luego tambien

$$d\,\mathfrak{T} R = d\,\mathfrak{T} F_1 + d\,\mathfrak{T} F_2 + \dots + d\,\mathfrak{T} F_n$$

Esta relacion espresa que, a cada momento, el trabajo elemental de la resultante es igual a la suma de los trabajos elementales de los componentes. Se deduce inmediatamente que tambien, durante un intervalo de tiempo cualquiera, el trabajo de la resultante es igual a la suma de los trabajos de los componentes. Es bien evidente que todos estos trabajos deben contarse desde un mismo momento oríjen.

Aplicacion.

Sea F una fuerza; X, Y, Z sus tres proyecciones sobre tres ejes rectangulares; ds un cambio de lugar del punto de aplicacion i dx, dy, dz las tres proyecciones de ds; $d\,\mathfrak{T} F$ el trabajo elemental de F correspondiente al cambio de lugar ds, se tiene

$$(7) \qquad d\,\mathfrak{T} F = X dx + Y dy + Z dz$$

En efecto, como F es la resultante de X, Y, Z, se tiene

$$d\,\mathfrak{T} F = d\,\mathfrak{T} X + d\,\mathfrak{T} Y + d\,\mathfrak{T} Z$$

Ahora, el trabajo de X es igual al producto de X por la proyeccion de ds sobre la direccion de X, es decir igual a Xdx; del mismo modo, los trabajos elementales de Y i Z son respectivamente Ydy i Zdz, luego la fórmula (7) está demostrada.

Otra demostracion del teorema de las fuerzas vivas

Cuando un punto material de masa m, es sometido a la accion de una fuerza F cuyas proyecciones sobre tres ejes rectangulares son X, Y, Z, las coordenadas del móvil satisfacen a las ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

$$m\frac{d^1y}{dt^2}=Y$$

$$m\frac{dz}{dt^2}=Z$$

Multipliquemos respectivamente estas ecuaciones por $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ i sumamos, se tendrá

$$m\left(\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\ \frac{d^2z}{dt^2}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}$$

O bien

$$\frac{1}{2}\ \frac{d\,(mv^2)}{dt}=\frac{d\,\mathcal{T}F}{dt}$$

Luego si v i v_0 son las velocidades del punto en dos instantes t i t_0 e si el trabajo de la fuerza se cuenta desde el momento t_0

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\ \mathcal{T}F$$

POTENCIAL

Consideremos un medio activo i un punto material, móvil en este medio. La accion del medio sobre el punto material podrá compararse a cada momento a la accion de un resorte elemental hipotético de la misma direccion que la fuerza i dotado de cierta enerjía potencial. Cuando el punto material pasa de una posicion A a otra posicion B, la variacion de la enerjía potencial del medio es la suma de las variaciones elementales de los resortes hipotéticos, colocados en los diferentes puntos de la trayectoria, desde A hasta B.

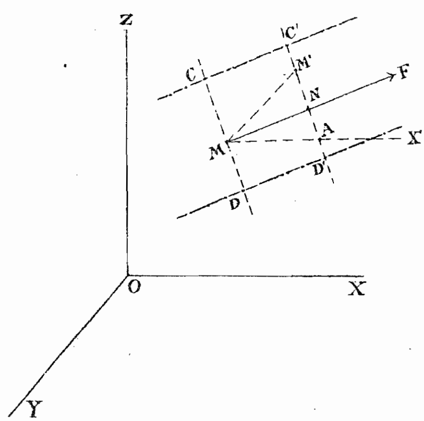
En jeneral, para calcular esta variacion total de enerjía habrá que conocer de antemano el movimiento del punto, de manera que la concepcion de los resortes dotados de enerjía no presenta ninguna ventaja efectiva para la determinacion del movimiento del punto.

Sin embargo, hai un caso mui importante en que la variacion de la enerjía potencial del medio activo, correspondiente al movimiento de un punto material, desde A hasta B, puede calcularse de antemano, sin necesidad de conocer el movimiento del punto, entre A i B.

Es el caso en que, al rededor de cada punto M del medio i a distancia infinitamente pequeña de M, la enerjía potencial del medio puede ser representada por la enerjía de un mismo resorte elemental, cuya estremidad libre recorre los puntos de la rejion considerada. Cuando esto sucede se dice que el medio tiene un *potencial.*

Sea (fig. 16), M un punto del medio activo; F la fuerza que obra, en este punto, sobre un punto material de masa m; consideremos, al rededor de M, un cilindro infinitamente delgado, paralelo a F; este cilindro representará, en la proximidad de M, la envoltura del resorte elemental definido mas arriba.

Fig. 16



Sea W_0 la enerjía potencial del resorte que obra en M sobre el punto de masa m, a cierto momento t; su estremidad libre CD es perpendicular a F; si el punto material pasa de M en M', CD viene en $C'\ D'$; sea $MN = dn$ la proyeccion de MM' sobre F; la enerjía potencial del resorte se habrá cambiado en $W_0 + dW$ i se tiene

$$dW = -Fdn$$

Si el medio tiene un potencial, $W_0 + dW$ es la enerjía del resorte hipotético que representa, en el mismo momento t, la accion del medio sobre el punto material de masa m, situado en M'. Conociendo la enerjía en M' se podrá determinar la que corresponde a otro punto del medio, infinitamente próximo de M' i así, progresivamente, se conocerá la enerjía W del resorte hipotético que obra, en el mismo momento t, en un punto cualquiera del medio activo, sobre el punto material considerado.

Como dW no depende de W_0, la diferencia $W - W_0$ no dependerá tampoco de W_0 i será una funcion de los coordenados del punto considerado i del tiempo t; sea $f(x, y, z, t)$ esta funcion, tendremos

$$W - W_0 = f(x, y, z, t)$$

La funcion $f(x, y, z, t)$ se llama *funcion potencial* i W es el *potencial del medio* en el punto de coordenadas x, y, z. La espresion jeneral del potencial en un punto es por consiguiente

$$W = f(x, y, z, t) + W_0$$

Consideremos las superficies definidas por la ecuacion jeneral

$$f(x, y, z, t) = C$$

En un mismo momento t, el potencial quedará constante en los puntos de cada una de ellas.

Estas superficies se llaman, por esta razon, *superficies equipotenciales* i tambien *superficies de nivel.*

PROPIEDADES DE LAS SUPERFICIES DE NIVEL

1.° *En un punto cualquiera del medio activo, la fuerza es normal a la superficie de nivel que pasa por este punto.*

Esto resulta inmediatamente de la figura (16). En efecto, si M' está situado en un punto cualquiera de la seccion CD, se tiene $dn=0$ i por consiguiente

$$dW=0$$

Luego el elemento plano CD pertenece a la superficie de nivel que pasa por M; como este elemento es perpendicular a F, la proposicion está demostrada.

2.° *Si se consideran dos superficies de nivel infinitamente próximas, la fuerza que obra en un punto cualquiera de una de ellas es inversamente proporcional a la distancia del punto considerado a la superficie infinitamente próxima.*

Sean en efecto W i $W+dW$ los potenciales en dos superficies de nivel infinitamente próximas; podemos suponer que, en la figura (16), estas superficies pasan por los elementos planos CD i $C'D'$; la fuerza que obra en M es, entónces

$$F=-\frac{dW}{dn}$$

Como la diferencia dW queda constante entre las dos superficies consideradas, se ve que F es inversamente proporcional a la distancia dn de M a la superficie infinitamente próxima.

3.° *Si un punto material, móvil en un medio activo i sometido solo a la accion de este medio, pasa de la posicion A a la posicion B i si la funcion potencial no contiene esplícitamente el tiempo, el medio aumento de la fuerza viva del punto no depende del camino que ha seguido éste para ir desde A hasta B, sino de la diferencia de los potenciales en A i B.*

Sean, en efecto W_1 i W_2 las potenciales en A i B, la variacion total de la enerjía potencial del medio, cuando el punto material pasa de A en B, es W_2-W_1; el trabajo correspondiente $\mathfrak{T}$ de la fuerza es por consiguiente

$$\mathfrak{T}=W_1-W_2$$

i este trabajo es igual a la cantidad de enerjía cinética, ganada por el punto; luego, si v_1 i v_2 son las velocidades en A i B

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \mathcal{T} = W_1 - W_2$$

Esta demostracion exije que el potencial en un punto cualquiera no varie con el tiempo, pues, de lo contrario, durante el tiempo que demora el punto material para ir de A a B, la diferencia de los potenciales en A i B cambiaria.

Como caso particular se puede suponer que A i B se encuentran sobre la misma superficie de nivel, entónces $W_1 = W_2$ i

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

Así la fuerza viva del punto i por consiguiente tambien su velocidad vuelven a tomar el mismo valor cuando el punto vuelve a la misma superficie de nivel.

PROYECCIONES DE LA FUERZA SOBRE TRES EJES RECTANGULARES

Sea X la proyeccion de F sobre OX; tracemos por el punto M (fig. 16) una paralela MX' a OX, sea P su interseccion con el elemento $C' D'$ i $MP = dx$; dx es la distancia, contada desde M paralelamente a OX, de las superficies de nivel W i $W + dW$.

Si θ es el ángulo de F con OX se tiene

$$X = F \cos\theta = -\frac{dW}{dn} \cos\theta$$

Pero

$$dn = dx \cos\theta$$

Luego

(8) $$X = -\frac{dW}{dx}$$

Como se ha establecido mas arriba, W es una funcion continua de x, y, z, t i, en la fórmula (8), dW es el incremento de W cuando x varia de dx sin que cambien y, z, t; luego $\frac{dW}{dx}$ es la derivada parcial de la funcion W respecto a x.

Las proyecciones Y, Z tienen la misma forma que X i se tiene

$$Y = -\frac{dW}{dy}$$

$$Z = -\frac{dW}{dz}$$

En resúmen, las tres proyecciones X, Y, Z de la fuerza F son los derivados parciales respecto a x, y, z de la funcion potencial W.

Potencial de una fuerza

Se dice, recíprocamente, que una *fuerza F tiene un potencial*, cuando las tres componentes X, Y, Z son las derivadas parciales de una misma funcion, respecto a x, y, z.

Todas las propiedades, obtenidas mas arriba, se averiguan cuando la funcion considerada depende solo de las tres coordenadas x, y, z i no del tiempo.

Sea, por ejemplo,

$$\phi\,(x, y, z) = C \tag{9}$$

cierta funcion continua de x, y, z i supongamos que

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{d\phi}{dx} \\ Y &= \frac{d\phi}{dy} \\ Z &= \frac{d\phi}{dz} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

La ecuacion (9) representa una familia de superficies que son las superficies de nivel i las ecuaciones (10) muestran que, en cada punto del espacio, la fuerza es normal a la superficie de nivel que pasa por su punto de aplicacion.

Sea tambien $\mathfrak{T}F$ el trabajo de la fuerza correspondiente a cierto cambio de lugar del punto de aplicacion; se tiene

$$d\,\mathfrak{T}F = X dx + Y dy + Z dz = d\phi$$

Luego

$$\mathfrak{T}F = \phi(x, y, z) + \text{Const.}$$

Esta fórmula demuestra que el trabajo depende solo, como mas arriba, de los valores de la funcion ϕ en los puntos estremos de la trayectoria i no de la forma misma de la trayectoria.

En la electricidad, la funcion potencial es la funcion $f(x, y, z)$ definida mas arriba, es decir, la funcion que representa en cada punto la enerjía potencial del resorte hipotético que obra sobre un punto material determinado.

En la mecánica se llama con preferencia funcion potencial, la funcion $\phi(x, y, z)$ cuya diferencial es el trabajo de la fuerza. Las dos funciones f i ϕ son, por lo demas, iguales i de signo contrario, puesto que $dW = -d\mathfrak{T}$.

Para conformarnos al uso, llamaremos tambien funcion potencial la funcion $\phi(x, y, z)$, cuya diferencial es el trabajo de la fuerza.

Potencial de la pesantez

Consideremos un sistema de tres ejes rectangulares entre los cuales uno sea vertical i dirijido desde abajo hácia arriba; un punto material de masa m es sometido a una fuerza tal que

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg$$

Luego, en este caso,

$$d\phi = -mgdz$$

$$\phi(x, y, z) = -mgz + \text{Const.}$$

Se ve que las superficies de nivel tienen por ecuacion jeneral

$$z = \text{Const.}$$

Son planos horizontales.

Potencial del medio interplanetario cuando se considera el movimiento de un solo planeta al rededor del Sol

Veremos mas adelante que la fuerza que obra sobre el planeta es dirijida hácia el Sol i varia en razon inversa del cuadrado de su distancia al Sol. Si se considera un sistema de tres ejes de coordenadas cuyo oríjen está en el centro del Sol i si r es la distancia del planeta, al oríjen, se tiene

$$X = -\mu m \frac{x}{r^3}$$

$$Y = -\mu m \frac{y}{r^3}$$

$$Z = -\mu m \frac{z}{r^3}$$

La funcion ϕ es en este caso determinada por la relacion

$$d\phi = -\frac{\mu m}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -\mu m \frac{dr}{r^2}$$

Luego

$$\phi = \frac{\mu m}{r} + \text{Const.}$$

En este caso, las superficies de nivel tienen por ecuacion jeneral

$$r = \text{Const.}$$

Son esferas concéntricas al Sol.

CAPÍTULO VI

DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

Newton ha deducido la lei de la gravitacion universal de las leyes de Kepler, sobre el movimiento de los planetas al rededor del Sol. El descubrimiento de Newton es seguramente el mas estraordinario de los que honran la intelijencia humana, es como un secreto que su jenio supo arrancar a la naturaleza. Por lo demas, esta lei es talvez la única, cuya comprobacion sea rigurosamente establecida.

Esplicaremos como se puede deducir la lei de la gravitacion universal de las leyes de Kepler. Aunque el método difiere del de Newton, la sucesion de las ideas es la misma.

Las dos primeras leyes de Kepler dicen: 1.º, los planetas describen elipses i el Sol está situado en uno de sus focos; 2.º, el área descrita por el radio rector, que une el planeta con el Sol, varia proporcionalmente al tiempo.

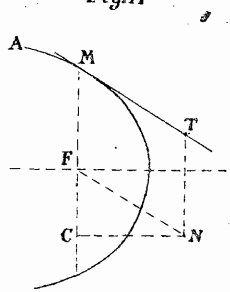
Se deduce de la segunda lei que la fuerza F que obra sobre un planeta es constantemente dirijida hácia el Sol; en seguida, se deduce de la primera lei que la curva de las fuerzas es una circunferencia.

La intensidad de F es dada por la fórmula (3) del capítulo anterior:

$$F=\frac{CR}{r^2}$$

Para un mismo planeta, R i C son constantes; luego la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del planeta al Sol.

Fig. 17



Calculemos los valores de C i R para un planeta determinado.

Sea (fig. 17) AB la elipse descrita por el planeta, F su foco, a i b sus ejes. La curva de las fuerzas es una circunferencia cuyo centro está sobre una perpendicular FC al eje mayor de la elipse; para determinar el centro, basta considerar el punto M, situado sobre la ordenada del foco i trazar en este punto la tanjente MT a la elipse; tomemos sobre esta tanjente, una lonjitud MT tal que el área del paralelógramo $MTNF$ sea igual a mC (C es la constante de las áreas: $2\frac{dA}{dt}$); el punto N es un punto de la curva de las fuerzas i, como la tanjente en este punto, a la curva de las fuerzas, es NT, el centro se encontrará en el punto C, situado sobre la perpendicular, en N, a NT; el radio R será igual a NC, luego si p es el parámetro de la elipse

$$Rp=mC$$

Segun esto

$$F = \frac{mC^2}{pr^2} = \frac{mC^2\,a}{b^2\,r^2}$$

Por otra parte, si T es tiempo de la revolucion del planeta, se tiene

$$C = \frac{2\,\pi\,ab}{T}$$

Luego

$$F = m\frac{4\,\pi^2 a^3 b^2}{T^2 b^2 r^2} = \frac{4\,\pi^2 a^3}{T^2}\;\frac{m}{r^2}$$

La tercera lei de Kepler dice: los cuadrados de los tiempos de revolucion de los planetas son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas; luego, en todo el sistema planetario, la fuerza es el producto de una *misma constante* por la masa del planeta considerado i por el inverso del cuadrado de su distancia al Sol.

La misma lei rije los movimientos de los satélites al rededor de un planeta; la constante solo cambia de valor.

Por una sucesion de inducciones naturales, Newton llegó a la conclusion que, en el sistema planetario, dos puntos materiales cualesquiera, de masas m i m' i a una distancia r uno de otro *parecen* ejercitar, uno sobre otro, una atraccion, dirijida segun la recta que los une i cuya intensidad es

$$\frac{f\,mm'}{r^2}$$

la constante f es comun a todo el sistema planetario; es la *constante de la gravitacion universal.*

DETERMINACION DE LA MASA DE LOS PLANETAS

Sea M la masa del Sol; a i T el semi-eje mayor i el tiempo de revolucion de un planeta se tiene

$$f\,M = \frac{4\,\pi^2 a^3}{T^2}$$

Supongamos ahora un planeta de masa μ i sean a', T' los elementos que caracterizan el movimiento de uno de sus satélites; se tendrá tambien

$$f\,\mu = \frac{4\,\pi^2\,a'^3}{T'^2}$$

Luego

$$\frac{\mu}{M} = \frac{a'^3}{a^3}\;\frac{T^2}{T'^2}$$

Esta fórmula permite comparar las masas de los planetas con satélites a la masa del Sol.

Calculemos, por ejemplo, la masa de la tierra; sea ρ el radio terrestre; a' i T' se referirán a la Luna i a, T a la Tierra, en su movimiento al rededor del Sol, tendremos

$$a' = 60\,\rho \qquad T = 365 \text{ dias}$$

$$a = \frac{\rho}{8{,}80 \text{ sen } 1''} \qquad T' = 27{,}3 \text{ id.}$$

Luego

$$\frac{\mu}{M} = \frac{1}{330{,}000} \text{ mas o ménos.}$$

La masa del Sol es, por consiguiente, 330,000 veces mayor que la de la Tierra.

VERIFICACION IMPORTANTE DE LA LEI DE NEWTON

La Luna, en su movimiento al rededor de la Tierra, satisface sensiblemente a las leyes de Kepler, luego si a' es el semi-eje mayor del órbita i T' el tiempo de la revolucion, la Tierra ejercita, sobre un cuerpo cualquiera de masa m, situado a la distancia r de su centro, una atraccion

$$F = \frac{4\,\pi^2\,a'^3}{T'^2}\;\frac{m}{r^2}$$

Si, en esta fórmula, se supone r igual al radio ρ de la Tierra la fuerza F debe ser la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo de masa m, situado a su superficie, luego F debe ser igual a mg i se debe averiguar la relacion

$$g=\frac{4\,\pi^2\,a'^3}{T'^2}\;\frac{1}{\rho^2}$$

Para hacer el cálculo numérico se deben espresar las lonjitudes en metros i los tiempos en segundos; se tiene entónces aproximadamente

$$a'=60\;\rho$$

$$2\;\pi\;\rho=40.000,000\text{ metros}$$

$$T'=27,3\times24\times60\times60\text{ segundos}$$

Con estos valores númericos se obtiene

$$\frac{4\,\pi^2 a'^3}{T'^2}\;\frac{1}{\rho^2}=9^{\text{m}},8$$

Es precisamente el valor de g.

Al hacer por primera vez este cálculo, Newton habia adoptado, para el radio ρ de la Tierra, el valor conocido en esa época. El resultado de su cálculo le dió entónces

$$\frac{4\,\pi^2 a'^3}{T'^2}\;\frac{1}{\rho^2}=8^{\text{m}},5$$

La diferencia entre este valor i el de g le pareció demasiado grande para admitir que la atraccion de la Tierra, sobre la Luna, tuviera el mismo oríjen que la pesantez i dejó a un lado la idea grandiosa de la atraccion universal. Dieziseis años mas tarde, Newton supo que *Picard* habia obtenido, con medidas exactas, un valor del radio terrestre mui distinto del conocido hasta entónces; volvió a emprender el cálculo i obtuvo, en fin, la verificacion tan deseada.

LOS CUERPOS CELESTES PUEDEN SER CONSIDERADOS COMO PUNTOS MATERIALES

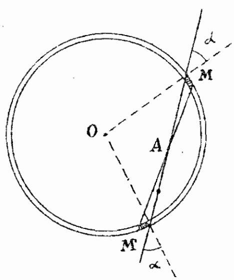
En el cálculo que hizo Newton para comparar la atraccion de la Tierra sobre la Luna i sobre un cuerpo situado a la superficie misma de la Tierra, se ha supuesto implícitamente que toda la masa de la Tierra estaba concentrada en su centro.

Del mismo modo, hemos considerado hasta ahora, los planetas como simples puntos materiales, aunque las dimensiones de estos cuerpos no eran infinitamente pequeñas respecto de su cambio de lugar en el espacio. Demostraremos que la forma esférica de estos cuerpos i la naturaleza de las acciones que obran entre ellos justifica este modo de hacer.

ATRACCION DE UNA ESFERA FORMADA POR CAPAS ESFÉRICAS I HOMOJÉNEAS

Consideremos en primer lugar una capa homojénea infinitamente delgada i (fig. 18) un punto A de masa m situado en el interior de esta capa, la atraccion resultante de todos los puntos de la capa sobre el punto A es igual a cero.

Fig. 18



Sea, en efecto dr el espesor de la capa i D la masa de la unidad de volúmen de la materia contenida en esta capa, D es la *densidad.* Consideremos en A dos conos infinitamente delgados, opuestos en el vértice A, i sea $d\omega$ el *ángulo sólido* de este cono; ($d\omega$ es el área de la interseccion de uno de los conos por una esfera de centro A i de radio *uno.*) Los dos conos cortarán, en la capa esférica, dos elementos materiales en M i M'. Sea α el ángulo de AM con el radio OM, este ángulo será tambien el que hace AM' con OM'. El volúmen del elemento material en M es

$$\frac{dr\, d\omega.\, \overline{AM}^2}{\cos\alpha}$$

Su atraccion sobre A será dirijida de A hácia M, i su intensidad será

$$F = f m \frac{D\, dr\ \ d\omega\, \overline{AM}^2}{\cos\alpha \times \overline{AM}^2} = f.\, m \frac{D\, dr\, d\omega}{\cos\alpha}$$

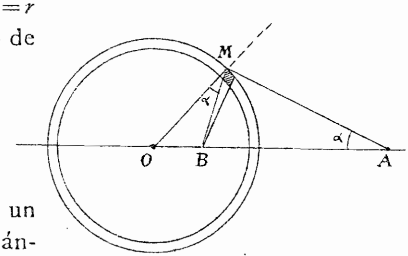
Del mismo modo, la atraccion de M' sobre A es dirijida desde A hácia M' i su intensidad es

$$F' = fm \frac{D\,dr\,d\omega\,\overline{AM'}^2}{\cos a \times \overline{AM'}^2} = fm \frac{D\,dr\,d\omega}{\cos a}$$

Se ve que $F = F'$; luego las atracciones de M i M' sobre A se hacen equilibrio. Lo mismo sucederá para el conjunto de todos los conos que tienen su vértice en A, luego la atraccion total de toda la capa esférica sobre A es nula.

Supongamos ahora (fig. 19) que el punto A esté en el esterior de la capa esférica. Sea $OA = a$ i $OM = r$ el radio de la capa; B un punto de OA tal que

Fig. 19



$$OB \times OA = r^2$$

i a el ángulo BMO.

En el punto B consideremos un cono infinitamente delgado de ángulo sólido $d\omega$; este cono cortará, en la capa, una masa de materia igual a

$$\frac{D\,dr\,d\omega \times \overline{BM}^2}{\cos a}$$

La atraccion de este elemento sobre A será por consiguiente

$$F = \frac{fm\,D\,dr\,d\omega \times \overline{BM}^2}{\overline{MA}^2 \times \cos a}$$

Es bien evidente que la atraccion resultante de la capa entera, sobre el punto A, será dirijida segun AO i su intensidad será por consiguiente

$$R = \Sigma\,F \cos a = fm\ D\,dr\,\Sigma \frac{d\omega \times \overline{BM}^2}{\overline{MA}^2}$$

Por otra parte se tiene

$$\frac{BM}{MA} = \frac{r}{a}$$

Luego

$$R = fm\, D\, dr \frac{r^2}{a^2}\, \Sigma\, d\omega$$

La suma de los ángulos sólidos $d\omega$ es igual al área de la esfera de radio uno, luego a $4\,\pi$, finalmente

$$R = fm D \frac{4\,\pi\, r^2\, dr}{a^2}$$

Sea μ la masa de la capa esférica, se tiene

$$\mu = 4\,\pi\, r^2\, dr\, D$$

Luego

$$R = \frac{fm\,\mu}{a^2}$$

Así la capa esférica atrae el punto A como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la capa.

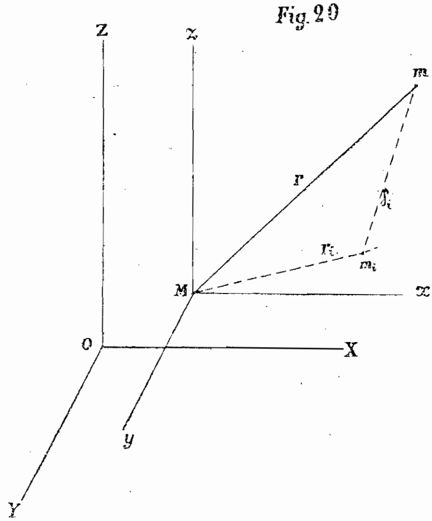
Este resultado se estiende inmediatamente al caso de una esfera llena, compuesta de capas esféricas homojéneas; cada una atrae un punto esterior como si estuviera concentrada en el centro de la esfera, luego la atraccion total de la esfera sobre un punto esterior es la misma como si la masa total de la esfera estuviera concentrada en su centro.

El caso estudiado es sensiblemente el caso de los planetas i del Sol; por este motivo se puede considerar todos estos cuerpos como puntos materiales.

ECUACIONES JENERALES DEL MOVIMIENTO DE UN PLANETA AL REDEDOR DEL SOL

Sean (fig. 20) m la masa del planeta considerado i M la del Sol; m_1 la masa de uno de los planetas que perturban el movimiento de m. Consideremos un sistema de ejes rectangulares, fijos en el espacio, i sean, respecto a este sistema, X, Y, Z las coordenadas del Sol ξ, η, ζ las del planeta m i ξ_i, η_i, ζ_i los del planeta m_i; r, r_i, δ_i las distancias Mm, Mm_i, mm_i.

Fig. 29



En proyeccion sobre OX el movimiento de m satisfará a la ecuacion

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=fMm\frac{X-\xi}{r^3}+\Sigma\, fmm_i\frac{\xi_i-\xi}{\delta_i{}^3}$$

O bien

$$(1)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}=fM\frac{X-\xi}{r^3}+\Sigma\, fm_i\frac{\xi_i-\xi}{\delta_i{}^3}$$

El signo Σ se estiende a todos los planetas tal como m_i que perturban el movimiento de m.

El Sol se mueve igualmente en el espacio i la proyeccion sobre OX de su movimiento satisface a la ecuacion

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=fMm\frac{\xi-X}{r^3}+\Sigma fMm_i\frac{\xi_i-X}{r_i{}^3}$$

O bien

$$(2)\qquad \frac{d^2X}{dt^2}=fm\frac{\xi-X}{r^3}+\Sigma\, fm_i\frac{\xi_i-X}{r_i{}^3}$$

Para determinar el movimiento del planeta m, al rededor del Sol, consideremos un sistema de tres ejes rectangulares paralelos al primero i que tiene su oríjen en el centro del Sol. Sean, respecto de este sistema, x, y, z las coordenadas de m i $x_i\ y_i z_i$ las de m_i se tendrá evidentemente

$$x = \xi - X$$

$$x_i = \xi_i - X$$

Si se restan éntónces las ecuaciones (1) i (2) se obtiene

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{x}{r^3} + \Sigma f m_i \left(\frac{x_i - x}{\delta_i^{\,3}} - \frac{x_i}{r_i^{\,3}}\right) \\ &\text{I, del mismo modo} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{y}{r^3} + \Sigma f m_i \left(\frac{y_i - y}{\delta_i^{\,3}} - \frac{y_i}{r_i^{\,3}}\right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{z}{r^3} + \Sigma f m \left(\frac{z_i - z}{\delta_i^{\,3}} - \frac{z_i}{r_i^{\,3}}\right). \end{aligned}\right.$$

Se tiene ademas

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_i^{\,2} = x_i^{\,2} + y_i^{\,2} + z_i^{\,2}$$

$$\delta_i^{\,2} = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$$

Despreciamos, en primer lugar, la accion de los planetas perturbadores, las ecuaciones (3) se reducirán a las siguientes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{y}{r^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{z}{r^3} \end{aligned}\right.$$

Estas indican que, el planeta se mueve como si el Sol estuviera fijo i como si el planeta estuviera sometido a una atraccion, dirijida hácia al sol, i de intensidad

$$F = \frac{f(M+m)m}{r^2}$$

El movimiento así simplificado del planeta es, en resúmen, determinado por las ecuaciones diferenciales (4) que se trata d integrar ahora.

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES (4)

Se deduce de las ecuaciones (4) las siguientes

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Luego

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C_1$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C_2$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3$$

I en seguida

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0$$

Luego el planeta se mueve en un plano que pasa por el Sol.

Tomaremos este plano como plano de coordenadas i las ecuaciones (4) se reducirán a dos: hagamos, para abreviar

$$f(M+m) = \mu \tag{5}$$

Tendremos

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu\frac{y}{r^3} \end{aligned} \right. \tag{6}$$

De estas se deducirá como mas arriba

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

Pongamos

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Tendremos

$$(7) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

Se ve que las áreas descritas por el radio vector que une el planeta al Sol varian proporcionalmente al tiempo; C se llama por esta razon *constante de las áreas;* la relacion (7), deducida de (6), es una primera integral.

Se puede obtener otra; en efecto se deduce de (6)

$$2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2\mu}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Sea v la velocidad del punto, el primer miembro es la derivada de v^2 i, en el segundo miembro, se tiene

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

luego

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -\frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = 2\mu \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}$$

La integracion es inmediata i se tiene

$$(8) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} + H$$

H es una constante i la integral obtenida es la espresion del teorema de las fuerzas vivas. En resúmen (7) i (8) son las integrales primeras de (6).

La ecuacion (8) puede escribirse tambien

$$(9) \qquad r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + H$$

ECUACION DE LA TRAYECTORIA

Esta resulta de la eliminacion de t entre las ecuaciones (7) i (9) se obtiene así

$$\frac{C^2}{r^2} + C^2 \left(\frac{dr}{r^2 d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + H \tag{10}$$

Esta ecuacion es la integral de la siguiente

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}$$

I de esto se deduce

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \tag{11}$$

Es la ecuacion de una cónica referida a su foco. Como (11) debe ser una consecuencia de (10); los dos constantes e i α deben satisfacer a (10), por consiguiente se debe tener, al reemplazar r por su valor

$$-\frac{\mu}{C^2}(1 - e^2) = H$$

Sean a i b los ejes de la cónica, se tiene

$$\frac{C^2}{\mu} = \frac{b^2}{a} \tag{12}$$

Sea tambien T el tiempo de la revolucion, el valor de C es

$$C = 2\pi\, ab$$

Luego, segun (12)

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu = f(M + m)$$

La espresion $(f\ M + m)$ varia con el planeta considerado, puesto que su valor es funcion de m; sin embargo, como m es jeneralmente insensible delante de la masa M del Sol, se podrá considerar $f(M+m)$ como sensiblemente igual a fM, es decir como una constante para todos los planetas; a esta órden de aproximacion, la espresion

$$\frac{a^3}{T^2}$$

es constante para todos los planetas.

Es la tercera lei de Kepler, la cual, como se ve, es solo aproximativa.

ESPRESION DE LA VELOCIDAD

El valor de H que figura en la fórmula (8) es tambien igual a $-\frac{1}{a}$, luego

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

Se ve que la naturaleza de la cónica depende solo de v i de r i no del ángulo que hacen entre sí estas dos direcciones.

MOVIMIENTO DEL PLANETA SOBRE SU TRAYECTORIA

Las ecuaciones (6) son equivalentes a las dos siguientes

$$r=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\ \cos(\theta-\alpha)}$$

$$r^2\ \frac{d\theta}{dt}=C=\frac{2\pi\,ab}{T}$$

Sea w el ángulo $\theta-\alpha$; este ángulo es el que el radio vector del planeta hace con la direccion que va al *perihelio*; w se llama en astronomía, *anomalía verdadera*. Sea tambien $\frac{2\pi}{T}=n$; n se llama *movimiento medio* del planeta; tendremos entónces

$$(13)\qquad r=\frac{(a\ 1-e^2)}{1+e\cos w}$$

$$r^2\ \frac{dw}{dt}=n\ a^2\sqrt{1-e^2}$$

Espresamos r en funcion de t, es decir eliminamos w; tendremos

$$n\,dt = \frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r^2)}}$$

Pongamos

$$a-r=a\,e\cos u$$

O bien

(14) $$r=a(1-e\cos u)$$

Tendremos

$$n\,dt=(1-e\cos u)\,du$$

Sea τ una constante, se deduce de la ecuacion precedente

(15) $$n(t-\tau)=u-e\,\text{sen}\,u$$

El ángulo u se llama *anomalía escéntrica.*

Cuando $u=0$ el planeta está en perihelio, es una consecuencia de (14); en este mismo momento se tiene

$$t=\tau$$

luego τ es el momento en que el planeta pasa al perihelio.

Igualemos ahora los valores (13) i (14) de r, tendremos

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}=a(1-e\cos u)$$

Luego

(16) $$\cos w=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}$$

Esta fórmula da w cuando se conoce u; como u es definido en funcion del tiempo por la ecuacion (15) se ve que finalmente r i w son conocidos en funcion de t.

La ecuacion (15) es trascendental i se llama *ecuacion de Kepler.*

Para calcular w se trasforma la fórmula (16); se deduce de ella

$$1+\cos w=2\cos^2\frac{w}{2}=\frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u}$$

$$1-\cos w=2\sin^2\frac{w}{2}=\frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u}$$

Luego

$$\operatorname{sen}\frac{w}{2}=\frac{\sqrt{1+e}\,\operatorname{sen}\frac{u}{2}}{\sqrt{1-e\cos u}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{w}{2}=\frac{\sqrt{1-e}\,\cos\frac{u}{2}}{\sqrt{1-e\cos u}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

Son las fórmulas usuales del movimiento de los planetas.

FUNCION PERTURBATRIZ

Consideremos las fórmulas completas (3) i sea una funcion P definida por la relacion

$$P=\Sigma fm_i\left(\frac{1}{\delta_i}-\frac{xx_i+yy_i+zz_i}{r_i^{\,3}}\right) \tag{17}$$

Se tiene

$$\frac{dP}{dx}=\Sigma\, fm_i\left(\frac{x\ -x}{\delta_i^{\,3}}-\frac{x_i}{r_i^{\,3}}\right)$$

$$\frac{dP}{dy}=\Sigma\, fm_i\left(\frac{y_i-y}{\delta_i^{\,3}}-\frac{y_i}{r_i^{\,3}}\right)$$

$$\frac{dP}{dz}=\Sigma\, fm_i\left(\frac{z_i-z}{\delta_i^{\,3}}-\frac{z_i}{r_i^{\,3}}\right)$$

De manera que las ecuaciones (3) pueden escribirse

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-f(M+m)\frac{x}{r^3}+\frac{dP}{dx}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-f(M+m)\frac{y}{r^3}+\frac{dP}{dy}\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=-f(M+m)\frac{z}{r^3}+\frac{dP}{dz}\end{aligned}\right. \tag{18}$$

La funcion P se llama *funcion perturbatriz*. Cuando se desprecia esta funcion se obtienen las ecuaciones (4) que son las del movimiento elíptico. Se concibe que, en jeneral, el movimiento de un planeta será sensiblemente elíptico, pues las masas m_i que figuran como coeficientes en la funcion P, son mui pequeñas respecto a la masa M del Sol; por esto es que, en una primera aproximacion, las leyes de Kepler representan mui sensiblemente los movimientos de los planetas.

Hemos visto mas arriba que las ecuaciones (4) permiten resolver completamente el problema del movimiento del planeta. No pasa lo mismo con las ecuaciones (18), su integracion completa es en efecto imposible, de suerte que, en la práctica, se trata solo de obtener soluciones aproximadas. El estudio de la funcion P i la resolucion aproximada de las ecuaciones (18) constituyen el problema fundamental de la mecánica celeste.

Consideremos ahora la funcion

$$V = -\frac{f(M+m)}{r} - P + \text{Const.}$$

Las ecuaciones (18) se trasforman en las siguientes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dV}{dz}$$

Se ve que la funcion V es el potencial del medio activo hipotético en el cual se mueve el planeta Esta funcion V satisface a una ecuacion importante. Se tiene en efectò

$$\frac{d^2V}{dx^2} = f(M+m)\left\{\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right\} - \Sigma f m_i \left\{-\frac{1}{\delta_i^{\,3}} + 3\frac{(x_i - x)^2}{\delta_i^{\,5}}\right\}$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = f(M+m)\left\{\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right\} - \Sigma f m_i \left\{-\frac{1}{\delta_i^{\,3}} + 3\frac{(y_i - y)^2}{\delta_i^{\,5}}\right\}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = f(M+m)\left\{\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right\} - \Sigma f m_i \left\{-\frac{1}{\delta_i^{\,3}} + 3\frac{(z_i - z)^2}{\delta_i^{\,5}}\right\}$$

I sumando

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Es la ecuacion de *Laplace*.

A. OBRECHT

(Continuará)