MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

La elipse central de inercia es entónces una circunferencia; en efecto, en el caso del triángulo equilátero, cada una de las tres alturas es eje principal de la elipse central, esta debe ser por consiguiente una circunferencia.

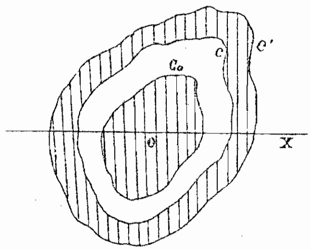
Lo mismo sucede para un polígono regular.

Momentos de inercia de una corona limitada por dos curvas homotéticas

Sean dos curvas homotéticas i un eje que pasa por el centro de similitud; n la razon de similitud. El momento de inercia de una de las áreas es la suma de los productos $r^2 d\omega$ i, para pasar de esta área a la otra, basta reemplazar cada elemento $d\omega$ por otro homotético $d\omega'$ i r por nr; pero $d\omega'$ es igual a $n^2 d\omega$, luego la razon entre los momentos de inercia de las dos curvas es n^4.

Consideremos ahora (fig. 53) tres curvas homotéticas C_0, C', C; sea O el centro de similitud i OX un eje cualquiera que pasa por este punto; supondremos que las curvas C i C' limitan la corona. Sean Ω_0 el área interior de la curva C_0, I_0 su momento de inercia, respecto de OX; Ω el área de la corona, I su momento de inercia respecto del mismo eje; sean finalmente n i n' las razones de similitud de C i C' a C_0. tendremos evidentemente

Fig 53



$$I = (n'^4 - n^4)\, I_0$$

$$\Omega = (n'^2 - n^2)\Omega_0$$

La curva C_0 es una curva ausiliar que podremos definir de tal manera que su área sea igual al área de la corona, entónces $\Omega = \Omega_0$ i se tiene

$$n'^2 - n^2 = 1$$

Luego

$$I = (2\,n^2 + 1)\, I_0$$

Se ve que I es igual a I_0 cuando n es igual a cero, entónces la curva C se reduce a un punto i la curva C' se confunde con C_0; por lo demas, I aumenta indefinidamente con n.

La fórmula obtenida mas arriba, se aplica a todos los ejes, tales como OX, que pasan por el punto O, luego la elipse de inercia de la corona en el punto O, es semejante a la elipse de inercia del área limitada por la curva C_0.

CAPÍTULO XIV

TEORÍA JENERAL DE LAS MÁQUINAS.—ROZAMIENTO

Una máquina es un sistema que trasmite i trasforma el trabajo de las fuerzas. Su objeto es de vencer ciertas resistencias determinadas i de producir cierto *trabajo útil.* El movimiento mismo enjendra otras resistencias, como el rozamiento; éstas deben ser vencidas tambien por la máquina i, por consiguiente, absorven *inútilmente* una porcion mas o ménos grande del trabajo.

Sea lo que fuera, una máquina puede ser considerada, en jeneral, como un sistema material, sometido a fuerzas motrices i a fuerzas resistentes: las primeras tienen un trabajo *positivo:* es el *trabajo motor;* las otras un trabajo negativo: su valor absoluto es el *trabajo resistente total* i comprende el trabajo útil i el trabajo de las resistencias pasivas como el rozamiento

Apliquemos a este sistema material el teorema de las fuerzas vivas: sean durante cierto intervalo de tiempo $t-t_0$, T_m el trabajo motor, T_r el trabajo resistente total i, en los momentos t i t_0, v i v_0 las velocidades de uno de los puntos de la máquina; m la masa de este punto, se tiene

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = T_m - T_r$$

Esta ecuacion contiene toda la teoría de las máquinas.

De una manera jeneral, cuando se quiere poner una máquina en marcha, se suprimen las resistencias hasta que la fuerza viva de la máquina haya adquirido cierto valor determinado; entónces, durante este primer intervalo de tiempo, se puede despreciar T_r; por otra parte, la fuerza viva inicial Σmv_0^2 es nula, luego la fórmula (1) se reduce a

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = T_m$$

Así, al principio, el trabajo motor es empleado en dar cierta cantidad de fuerza viva a la máquina.

En seguida, cuando la máquina ha llegado a su réjimen normal, la fuerza viva oscila jeneralmente entre ciertos límites i i vuelve a adquirir el mismo valor despues de ciertos intervalos de tiempo llamados *períodos.* Supongamos que el intervalo de tiempo $t-t_0$ comprende uno o mas períodos, en estos dos momentos la fuerza viva de la máquina tiene un mismo valor, luego la fórmula (1) se reduce a

$$0 = T_m - T_r$$

El trabajo motor es, por consiguiente, igual al trabajo resistente.

Finalmente, cuando se quiere parar la máquina, se suprimen las fuerzas motrices; supongamos entónces que t_0 sea el momento en que se suprimen estas fuerzas i t el momento en que la máquina ha vuelto al reposo, la fórmula (1) dará

$$\frac{1}{2}\Sigma m v_0{}^2 = T_r$$

Por consiguiente, en este último lapso de tiempo, la fuerza viva de la máquina produce un trabajo resistente i devuelve el trabajo motor que, al principio, se habia gastado para poner la máquina en marcha.

Lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad.

Despreciamos las variaciones de la fuerza viva de una máquina durante su réjimen normal, tendremos, a cada momento

$$T_m = T_r$$

Representemos ahora las fuerzas motrices por una sola fuerza F dirijida a cada instante segun el cambio de lugar de su punto de aplicacion i sea V la velocidad constante de este punto; durante el tiempo dt el trabajo motor será igual a

$$F \times V dt$$

Representemos tambien las resistencias por una sola fuerza f, dirijida a cada instante segun el cambio de lugar de su punto de aplicacion i sea v la velocidad de este punto, en el momento considerado; durante el mismo intervalo de tiempo dt, el trabajo resistente total será igual a

$$f \times vdt$$

Se tiene por consiguiente

$$FVdt = fvdt$$

O bien

$$FV = fv$$

Esta fórmula es la espresion analítica del adajio enunciado mas arriba

Rendimiento de una máquina

El trabajo resistente total T_r es la suma del trabajo útil T_u i del trabajo T_f de las resistencias pasivas, luego

$$T_r = T_u + T_f$$

I, como el trabajo motor T_m es igual a T_r, se tiene tambien

$$T_m = T_u + T_f$$

Se llama *rendimiento* de la máquina, la razon entre el trabajo útil i el trabajo motor, luego

$$\text{Rendimiento} = \frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}$$

Movimiento perpétuo

Si se pudieran suprimir en una máquina, todas las resistencias pasivas, el rendimiento seria igual a uno. Este es, por consiguiente, el máximo teórico del rendimiento: el trabajo motor es entónces exactamente igual al trabajo útil. Una máquina así perfeccionada podría tener un *movimiento perpétuo* despues de haber recibido cierta impulsion inicial i sin que se gaste, en seguida, ningun trabajo motor, pero el trabajo útil seria entónces igual al trabajo motor, es decir, igual a *cero*. Esto es lo único que pueden anhelar lójicamente los inventores del movimiento perpétuo.

Potencia de una máquina

Se llama *potencia* de una máquina, la cantidad de trabajo que ella puede producir durante la unidad de tiempo.

Segun esta definicion, las dimensiones de la potencia son las del cociente de un trabajo por un tiempo o las del producto de una fuerza por una velocidad.

La unidad de potencia es el *caballo-vapor*, es decir, la potencia de una máquina hipotética, capaz de producir un trabajo de 75 kilográmetros por segundo. Se recordará que el kilográmetro es el trabajo necesario para levantar un peso de un kilógramo a un metro de altura.

Sea, por ejemplo, F la resistencia total que vence una máquina i V la velocidad del punto de aplicacion de esta resistencia: si F *es espresado en kilógramos* i V *en metros por segundo*, se tendrá, para la potencia C de la máquina, espresada en caballos-vapor,

$$G = \frac{FV}{75}$$

Aplicacion.—Una locomotora arrastra un tren con una velocidad de 50 kiómetros por hora, la resistencia vencida es equivalente a una fuerza de 4 toneladas; calcular la potencia de la máquina.

Se tiene en este caso

$$F = 4000 \text{ kilógramos}$$

$$V = \frac{50 \times 1000}{60 \times 60} \text{ metros por segundo}$$

Luego

$$C = \frac{4000 \times 50 \times 1000}{60 \times 60 \times 75} = 741 \textit{ caballos-vapor}$$

DE LOS VOLANTES

Se llama *volante* una rueda, de masa i radio convenientes, concéntrica al *árbol principal* de una máquina; el árbol principal está en relacion directa con las fuerzas motrices i gobierna todos los demas órganos de la máquina.

En jeneral, la intensidad de las fuerzas motrices varía periódicamente, luego tambien las velocidades de los diferentes órganos de la máquina son variables, de ahí nacen choques i rozamientos que absorben una parte del trabajo motor. Es para disminuir esta pérdida de trabajo que se trata de regularizar lo mas posible el movimiento de la máquina i se comprende que para esto habrá que regularizar el movimiento de rotacion del árbol principal.

Se sabe que, cuando un sólido jira al rededor de un eje, el efecto de las fuerzas sobre la velocidad angular de rotacion es tanto mas pequeño cuanto mas grande es el momento de inercia del sólido respecto del eje; se concibe así que la regularizacion del movimiento de una máquina, será tanto mas perfecta cuanto mas grande sea el momento de inercia del volante.

Sin embargo, en la práctica, no se puede aumentar indefinidamente este momento de inercia i se determina su valor de tal manera que las velocidades mínima i máxima, ω_1 i ω_2, satisfagan a la relacion.

$$(2) \qquad \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{n} \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

El número n se llama coeficiente de regularizacion i su valor varía practicamente entre 30 i 80.

Cálculo práctico de los volantes

Sea O el centro de la circunferencia del volante, i, a cierto momento t, OM la posicion de uno de sus radios, θ el ángulo de OM con cierta direccion fija.

El trabajo motor T_m i el trabajo resistente total T_r, contados desde cierto momento inicial t_0 hasta el momento t, seran funciones determinadas de θ i estas funciones dependeran de la naturaleza misma de la máquina i de las fuerzas que obran en ella.

Escribamos

$$T_m = F(\theta)$$

$$T_r = f(\theta)$$

La ecuacion jeneral (1) toma entónces la forma

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = F(\theta) - f(\theta) \tag{3}$$

Para mas sencillez supondremos que, en el momento inicial t_0, el ángulo θ es igual a cero. Durante el réjimen normal, el movimiento de la máquina debe ser periódico i el período debe ser el tiempo correspondiente a una vuelta del volante; segun esto, las fuerzas motrices i resistentes deberan satisfacer a una primera condicion, la cual espresa que la fuerza viva Σmv^2 es igual a Σmv_0^2 cuando el ángulo θ es igual a 2π. Se tiene por consiguiente, segun (3)

$$F(2\pi) - f(2\pi) = 0 \tag{4}$$

Sea ahora I el momento de inercia, todavia incógnito, del volante i ω i ω_0 sus velocidades angulares en los momentos t i t_0; despreciemos la fuerza viva de todas las piezas de la máquina delante de la fuerza viva del volante, la ecuacion (3) se reducirá a la siguiente:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = F(\theta) - f(\theta) \tag{5}$$

Pongamos

$$F(\theta) - f(\theta) = \phi(\theta) \tag{6}$$

Los máximos i mínimos de ω corresponderan a los máximos i mínimos de $\phi(\theta)$, luego los valores correspondientes de θ averiguarán la ecuacion

$$\phi'(\theta) = 0$$

Se encontrarán jeneralmente dos soluciones θ_1, θ_2; la primera corresponderá a una velocidad angular mínima ω_1 la otra a una velocidad angular máxima ω_2 i se tendrá, segun (5) i (6),

$$I\frac{\omega_1^2-\omega_0^2}{2}=\phi(\theta_1)$$

$$I\frac{\omega_2^2-\omega_0^2}{2}=\phi(\theta_2)$$

Luego

$$I\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}=\phi(\theta_2)-\phi(\theta_1)$$

Ahora la condicion (2) puede escribirse tambien

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}=\frac{1}{n}\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)^2$$

Representemos por ω_m la velocidad media $\frac{\omega_1+\omega_1}{2}$ tendremos

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}=\frac{1}{n}\omega_m^2$$

Luego el momento de inercia I del volante debe satisfacer a la relacion

$$(7)\qquad I\frac{1}{n}\omega_m^2=\phi(\theta_2)-\phi(\theta_1)$$

Hemos representado por $F(2\pi)$ la espresion del trabajo motor correspondiente a una vuelta entera del volante. Pongamos

$$(8)\qquad \frac{\phi(\theta_2)-\phi(\theta_1)}{F(2\pi)}=K$$

La cantidad K será un coeficiente numérico, cuyo valor dependerá de la naturaleza de la máquina; la relacion (7) se reduce entónces a

$$I\frac{1}{n}\omega_m^2=K.F(2\pi)$$

Luego

$$I = \frac{n K . F (2\pi)}{\omega_m{}^2}$$

Sea C la potencia de la máquina espresada en caballos-vapor i N el número de vueltas del volante en un minuto; se tendrá sensiblemente

$$\omega_m = \frac{2\pi N}{60}$$

$$F (2\pi) = \frac{C \times 60 \times 75}{N}$$

Luego

$$I = \frac{n K C \times \overline{60}^3 \times 75}{4 \pi^2 N^3}$$

En este cálculo aproximado se puede considerar el volante como una simple circunferencia pesada; sea R su radio i P su peso, g la gravedad; se tendrá

$$I = \frac{P}{g} R^2$$

Luego

$$PR^2 = \frac{n K C g \times \overline{60}^3 \times 75}{4\pi^2 N^3}$$

Como el coeficiente de regularizacion n es comprendido jeneralmente entre 30 i 80, adoptaremos aquí $n = 50$; el número N de vueltas del volante al minuto será jeneralmente mayor que 100, escribiremos entónces

$$PR^2 = KC \left(\frac{100}{N} \right)^3 \frac{50 \times \overline{60}^3 \times g \times 75}{4\pi^2 \times \overline{100}^3}$$

Adoptemos finalmente $g = 9^m,80$ i tendremos

$$(9) \qquad PR^2 = 201\ KC\left(\frac{100}{N}\right)^3$$

En esta fórmula, P es el peso del volante en kilógramos, R su radio en metros, C la potencia de la máquina en caballos-vapor, N el número de vueltas del volante en un minuto; K es un coeficiente numérico que depende de la naturaleza de la máquina.

Aplicaciones

Valor del coeficiente K en la manivela de simple efecto

En la manivela de simple efecto, la fuerza motriz obra solo durante una media vuelta del volante i queda sensiblemente constante en magnitud, direccion i sentido durante este lapso de tiempo. Sea F_m su intensidad media i a la lonjitud del brazo a la estremidad del cual está aplicada F_m. Supondremos que la fuerza obra cuando la orientacion del brazo varía desde $\theta = o$ hasta $\theta = \pi$; para un valor cualquiera de θ, comprendido entre o i π, el trabajo motor tendrá por espresion

$$T_m = F(\theta) = F_m a(1 - \cos\theta)$$

Sea ahora F_r la resistencia, supongamos que esta fuerza queda sensiblemente constante i obra tanjencialmente a una circunferencia de radio b; supongamos ademas que esta circunferencia da μ vueltas, cuando el volante da una vuelta, el trabajo resistente correspondiente a una rotacion θ del volante será sensiblemente

$$T_r = f(\theta) = F_r\ b\mu\theta$$

Ahora el movimiento del volante debe ser periódico despues de cada vuelta i, segun la condicion (4), se debe tener

$$F(2\pi) - f(2\pi) = 0$$

Se tiene aquí

$$F(2\pi) = F(\pi) = F_m \times 2a$$

$$f(2\pi) = F_r\, b\mu \times 2\pi$$

Luego se debe tener

$$(10) \qquad F_m\, a = F_r\, b\mu\pi$$

Se ha escrito ahora

$$\phi(\theta) = F(\theta) - f(\theta)$$

Luego

$$\phi(\theta) = F_m\, a\,(1 - \cos\theta) - F_r\, b\mu\pi$$

O bien, segun (10)

$$\phi(\theta) = F_m\, a\left(1 - \cos\theta - \frac{\theta}{\pi}\right)$$

Los máximos i mínimos de la velocidad angular del volante corresponden a los máximos i mínimos de $\phi(\theta)$, luego los valores correspondientes de θ averiguan la ecuacion

$$(11) \qquad \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{\pi} = 0$$

Como la derivada segunda es $\cos\theta$, se ve que el ángulo, agudo θ_1 que satisface a la ecuacion (11), corresponde a un mínimo de $\phi(\theta)$, la otra solucion θ_2 es entónces igual a $\pi - \theta_1$ i se tiene

$$\phi(\theta_2) = F_m\, a\left(1 + \cos\theta_1 - \frac{\pi - \theta_1}{\pi}\right)$$

$$\phi(\theta_1) = F_m\, a\left(1 - \cos\theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi}\right)$$

Luego

$$\phi(\theta_2) - \phi(\theta_1) = F_m\, a\left(2\cos\theta_1 - 1 + \frac{2\theta_1}{\pi}\right)$$

Finalmente

$$K = \frac{\phi(\theta_2) - \phi(\theta_1)}{F(2\pi)} = \cos\theta_1 - \frac{1}{2} + \frac{\theta_1}{\pi}$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{\pi}$$

El cálculo numérico da

$$K = 0{,}551$$

Al llevar este valor en la fórmula jeneral (9) se obtiene

$$(12) \qquad PR^2 = 111\, C\left(\frac{100}{N}\right)^3$$

Supongamos por ejemplo que $C = 10$, $N = 200$, $R =$ un metro, se obtiene

$$P = 111 \times 10 \left(\frac{100}{200}\right)^3 = 139 \text{ kilógr.}$$

Manivela de doble efecto

En esta manivela, la fuerza motriz obra durante una vuelta entera del volante pero en un sentido determinado desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ i en sentido opuesto desde $\theta = \pi$ hasta $\theta = 2\pi$. Sea todavia F_m la intensidad de la fuerza motriz, se tendrá, como mas arriba

$$T_m = F(\theta) = F_m\, a\,(1 - \cos\theta)$$
$$T_r = f(\theta) = F_r\, b\mu\pi$$

Pero ahora

$$F(2\pi) = 2\, F(\pi) = 4\, a\, F_m$$

La condicion de periodicidad es entónces

$$4\, a\, F_m - F_r\, b\mu \times 2\pi = 0$$

I se tiene

$$\phi(\theta) = F_m\, a\left(1 - \cos\theta - \frac{2\theta}{\pi}\right)$$

$$\phi'(\theta) = F_m\, a\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{\pi}\right) = 0$$

Sea todavia θ_1 el ángulo cuyo seno es $\frac{2}{\pi}$, este valor como mas arriba corresponde a un mínimo de $\phi(\theta)$ i el valor correspondiente al máximo es $\pi - \theta_1$, luego

$$\phi(\theta_2) - \phi(\theta_1) = F_m\, a\left(2\cos\theta_1 - 2 + \frac{4\theta_1}{\pi}\right)$$

Finalmente

$$K = \frac{\phi(\theta_2) - \phi(\theta_1)}{F(2\pi)} = \frac{\cos\theta_1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\theta_1}{\pi}$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{2}{\pi}$$

El cálculo numérico da

$$K = 0{,}105$$

Luego, al llevar este valor en la fórmula (9) se obtiene

$$PR^2 = 21\, C\left(\frac{100}{N}\right)^3 \qquad (13)$$

Como se ve, la regularizacion del movimiento de esta máquina se puede hacer, en las mismas condiciones, con un volante cinco veces mas liviano.

DEL ROZAMIENTO

Para hacer resbalar un cuerpo sobre otro, es necesario desarrollar cierto esfuerzo finito i, para mantener en seguida la velocidad de resbalamiento constante, es necesario empujar constantemente el cuerpo móvil. Hai por consiguiente una resistencia que se opone al resbalamiento de los cuerpos unos sobre otros; esta resistencia se llama rozamiento.

Coulomb estableció esperimentalmente las leyes siguientes: El rozamiento es: 1.° proporcional a la presion normal de los cuerpos que rozan; 2.° independiente de las superficies planas en contacto; 3.° mayor a la partida que durante el movimiento; 4.° independiente de la velocidad durante el movimiento. Ademas, el rozamiento depende esencialmente de la naturaleza i del estado de las superficies en contacto, de su pulido mas o ménos perfecto i de los lubrificantes.

Esto resultados suponen que la presion normal i la velocidad de resbalamiento quedan comprendidos entre ciertos límites determinados.

Condiciones de equilibrio de un cuerpo apoyado sobre un plano, cuando se toma en cuenta el rozamiento

El cuerpo puede tocar el plano en un número cualquiera de puntos. Se llama entónces *polígono* de apoyo el polígono convexo, de área mínima, que contiene en el interior todos los puntos de contacto. Es bien evidente que los vértices de este polígono son puntos de apoyo.

En cada punto de contacto, el plano ejercita una reaccion sobre el cuerpo i cada una de estas reacciones puede descomponerse en una fuerza normal al plano i en otra fuerza situada en el plano. Los componentes normales tienen evidentemente todas un mismo sentido, luego ellas son siempre equivalentes a una fuerza única N, cuya línea de accion encuentra el plano en el interior del polígono de apoyo; ademas si N es nulo, las componentes normales son separadamente nulas.

La intensidad de cada componente, situada en el plano, es proporcional a la componente normal correspondiente, luego si N es nulo, las componentes situadas en el plano son separadamente nulas.

Para que el cuerpo considerado quede en reposo, es necesario que las fuerzas esteriores i las reacciones del plano se hagan equilibrio. Se puede ver desde luego, que las fuerzas esteriores no pueden ser equivalentes a un par único. En efecto, si esto sucediera, el par único deberia equilibrar la fuerza normal N i las reacciones situadas en el plano; lo que es evidentemente imposible.

1er *Caso. Las fuerzas esteriores que obran sobre el cuerpo son equivalentes a una fuerza única* F.

Sea M el punto en que la línea de accion de esta fuerza encuentra el plano; descompongamos en este punto la fuerza F en dos componentes: una F_n normal al plano, la otra F_t situada en el plano.

Para que el cuerpo esté en equilibrio es necesario, en primer lugar, que F_n i la reaccion normal N sean iguales, de sentido opuesto i situadas sobre la misma línea de accion; esto demuestra ya que el punto M debe estar situado en el interior del polígono de apoyo. En seguida la componente F_t debe ser menor que el rozamiento.

Segun las leyes esperimentales de Coulomb, el rozamiento correspondiente a una presion normal N puede representarse por fN. El coeficiente f es el *coeficiente de rozamiento.* Se debe tener, por consiguiente

$$F_t < fF_n$$

Sea α el ángulo de F con la normal al plano i sea

$$f = tg\, i$$

La relacion precedente equivale a

$$\alpha < i$$

El ángulo i se llama *ángulo de rozamiento.*

Caso jeneral

Se podrá siempre reemplazar las fuerzas esteriores por una resultante F aplicada en un punto M del plano i un par cuyo eje G es perpendicular al plano.

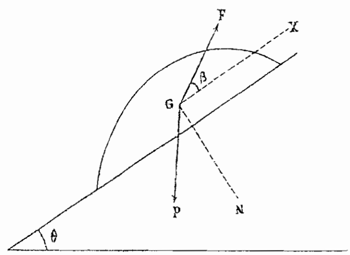
Reemplacemos tambien F por las componentes F_n, F_t, aplicadas en M; la componente F_n debe equilibrar N, luego

1.° el punto M debe estar situado en el interior del polígono de apoyo; 2.° el ángulo α de F con la normal deberá ser menor que el ángulo de rozamiento; 3.° el eje del par de las reacciones de rozamiento, relativo al punto M, debe ser menor que G.

Aplicacion al equilibrio de un cuerpo pesado apoyado sobre un plano inclinado

Sea (fig. 54) un cuerpo de peso P apoyado sobre un plano inclinado, i F una fuerza aplicada directamente a su centro de gravedad G, en el plano vertical que contiene la línea de mayor pendiente. Sea θ la inclinacion del plano i β el ángulo de F con la direccion ascendente GX de la línea de mayor pendiente.

Fig. 54



Las dos fuerzas P i F son equivalentes a una fuerza única aplicada en G; sea N la componente normal de esta resultante, en el sentido GN i T la componente dirijida, segun la línea de mayor pendiente, en el sentido de GX, se tiene

$$(8) \qquad \begin{cases} N = P\cos\theta - F\,\mathrm{sen}\,\beta \\ T = F\cos\beta - P\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

La primera condicion para que haya equilibrio es que N sea positivo; el cuerpo está entónces empujado hácia el plano.

1.° Supongamos que T sea positivo; el cuerpo tiene tendencia a subir, pero el rozamiento le opone una resistencia que puede llegar hasta ser igual a fN, luego para que haya equilibrio basta que

$$T - fN < 0$$

Reemplacemos T i N por sus valores (8) i f por $tg\,i$; se tendrá tambien

$$(9) \qquad \frac{F\cos(i-\beta)-P\,\text{sen}\,(i+\theta)}{\cos i}<0$$

O bien

$$F<\frac{P\,\text{sen}\,(i+\theta)}{\cos\,(i-\beta)}$$

Si F llega a ser igual al segundo miembro, el cuerpo estará todavia en equilibrio, pero una impulsion ascendente le dará un movimiento ascendente uniforme.

La fórmula obtenida muestra que el valor mínimo de F que hace subir el cuerpo con un movimiento uniforme, corresponde al caso de $i=\beta$, entónces

$$F=P\,\text{sen}\,(i+\theta)$$

2.º Supongamos T negativo; el cuerpo tiene tendencia en bajar, pero el rozamiento le opone todavia una resistencia que puede llegar a ser igual a fN; luego para que haya equilibrio es necesario

$$(-T)-fN<0$$

O bien si se reemplazan T i N por sus valores i f por $tg\,i$

$$(10) \qquad \frac{-F\cos(i+\beta)+P\,\text{sen}\,(\theta-i)}{\cos i}<0$$

O bien

$$F>\frac{P\,\text{sen}\,(\theta-i)}{\cos\,(i+\beta)}$$

Si F es igual al segundo miembro, el cuerpo está todavia en equilibrio, pero una impulsion descendente, le dará un movimiento descendente uniforme.

El valor mínimo de F que dá al cuerpo un movimiento descendente uniforme, corresponde ahora al caso de $\beta = -i$ i el valor de F es

$$F = P \text{ sen } (\theta - i)$$

Caso particular

Si la fuerza F estuviera nula, se tendria

$$T = -P \text{ sen } \theta$$

luego el cuerpo tendría solo tendencia en bajar; la condicion (10) se reduce entónces a

$$\theta < i$$

Si $\theta = i$, el cuerpo se mantiene todavia en equilibrio, pero una impulsion descendente le dará un movimiento descendente uniforme.

A. OBRECHT

(Continuará)