MECÁNICA RACIONAL

CAPÍTULO XVII

TEORÍA DEL DERRAME DE LOS LÍQUIDOS

En esta teoría se supone invariablemente que el nivel del líquido en el depósito queda constante i que el movimiento del líquido es permanente.

El derrame puede efectuarse por medio de tres clases distintas de orificios: 1.º orificios en pared delgada; 2.º orificios con tubos adicionales; 3.º orificios de perímetro abierto o *vertederos.*

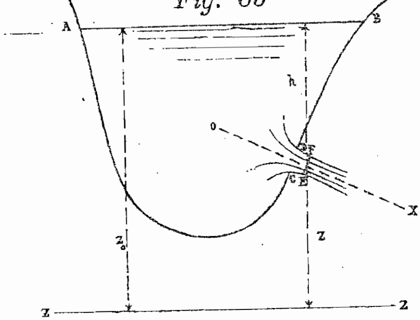
I

ORIFICIOS EN PARED DELGADA

Sea (fig. 65) un depósito de agua, AB el nivel superior i CD un orificio de área ω. La observacion demuestra que, una vez el réjimen permanente establecido, la vena líquida, al salir del orificio, tiene una contraccion contínua desde CD hasta una seccion EF, paralela a CD. La seccion EF, llamada *seccion con-*

traida, está situada a una distancia de CD igual a la mitad, mas o ménos, del diámetro del orificio i su área, medida directamente, es sensiblemente igual a 0,62 ω.

Fig. 65



Despues de la seccion contraída, la vena líquida toma la forma de una parábola, luego, desde esa seccion, cada molécula líquida se mueve sensiblemente como si estuviera aislada de las demas.

Cuando las dimensiones del orificio son suficientemente pequeñas, respecto de su distancia h al nivel superior, la observacion muestra que la velocidad de las moléculas líquidas que atraviesan la seccion contraida es igual a $\sqrt{2gh}$.

Veamos en primer lugar cómo se puede comprobar este resultado. Hai para esto dos métodos: 1.° Supongamos que el orificio esté abierto en una pared vertical i sea v la velocidad del líquido a la salida, referimos las posiciones de las moléculas líquidas a dos ejes: uno OX vertical i dirijido hácia abajo, el otro OY dirijido segun la velocidad v; la ecuacion de la parábola descrita por la vena líquida es entónces

$$y^2 = \frac{2v^2}{g} x$$

Ahora, la forma de la vena líquida medida directamente satisface a la ecuacion

$$y^2 = 4hx$$

luego

$$v = \sqrt{2gh}$$

2.° Medimos el gasto Q del orificio. Sea ω' el área de la seccion contraida, el volúmen de agua que sale durante el tiempo dt es $\omega' v dt$, luego

$$Q = \omega' v$$

La observacion da ahora

$$Q = 0{,}62\ \omega \sqrt{2gh}$$

$$\omega' = 0{,}62\ \omega$$

Luego

$$v = \sqrt{2gh}$$

Aunque estas comprobaciones no tienen una precision mui grande, admitiremos sin embargo que la velocidad del líquido, en la seccion contraida es rigorosamente igual a $\sqrt{2gh}$.

Apliquemos ahora la fórmula de Bernouilli á una molécula líquida, desde su partida del nivel superior AB hasta su llegada a la seccion contraída EF, sea ZZ un plano horizontal oríjen; tendremos, respecto de este plano

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{v_0^2}{2g} - P$$

En el caso considerado las presiones p i p_0 son iguales a la presion atmosférica; por otra parte v_0 es mui pequeño respecto de v i se puede despreciar, finalmente $z_0 - z$ es igual a h, luego

$$\text{(1)} \qquad \frac{v^2}{2g} = h - P$$

La observacion demuestra que v es igual a $\sqrt{2gh}$ luego se debe tener

$$P = 0$$

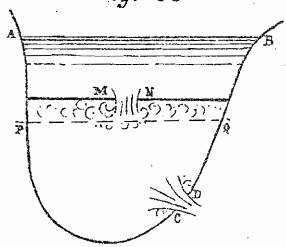
Llegamos por consiguiente a este resultado que no hai pérdida de carga para las moléculas que llegan a la seccion contraída.

Sin embargo, esto supone que no hai cambios bruscos de seccion en el interior del depósito.

Caso en que el depósito presenta cambios bruscos de seccion.

Sea (fig. 66) un depósito en el interior del cual se ha colocado una pared horizontal con un orificio MN, de área ω_1; al pasar por este orificio la vena líquida sufrirá una contraccion, de suerte que el área de la seccion contraída podrá representarse por $m\omega_1$; sea tambien ω el área del orificio CD de salida, el área de la seccion contraída será $m\omega$ (admitamos que el coeficiente m es sensiblemente constante, como lo indica la observacion); la velocidad v del líquido, al salir del depósito es segun (1)

Fig. 66



$$\frac{v^2}{2g} = h - P$$

Para determinar P llamarémos u la velocidad del líquido en la seccion contraida $m\omega_1$ que sigue MN i u' la velocidad en una seccion PQ situada a cierta distancia por debajo de MN; sea A el área de esta seccion PQ. Como el gasto en todo el depósito es constante, se tiene

$$m\,\omega_1\,u = A\,u' = m\,\omega\,v$$

Por otra parte

$$P = \frac{(u - u')^2}{2g}$$

Luego, en el caso considerado, se tiene

$$P = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{m\omega}{A}\right)^2$$

O simplemente, si A es mui grande respecto de ω

$$P = \frac{v^2}{2g} \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$$

Finalmente, la velocidad v a la salida satisfará a la fórmula

$$\frac{v^2}{2g} = h - \frac{v^2}{2g} \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$$

O bien

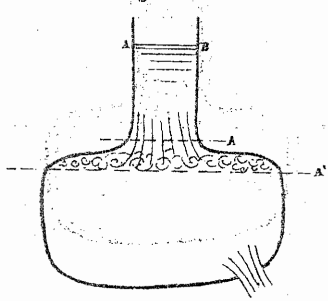
$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$$

Si hubieran varias paredes horizontales en el depósito, se tendria de la misma manera

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{\omega^2}{\omega_2^2} + \cdots}$$

La velocidad v disminuye por consiguiente; sin embargo esta disminucion sería insensible si el orificio de salida ω estuviera mui pequeño respecto de los orificios ω_1, ω_2, etc.

Fig. 67



Habria tambien pérdida de carga si el depósito presentara un ensanche brusco de seccion, como en la fig. 67. Sean entónces A i A' las secciones del depósito ántes i despues del ensanche se tendria, como mas arriba

$$P = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{m\omega}{A} - \frac{m\omega}{A'} \right)^2$$

Luego

$$\frac{v^2}{2g}=h-\frac{v^2}{2g}\left(\frac{m\,\omega}{A}-\frac{m\,\omega}{A'}\right)^2$$

O bien

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{h}{1+\left(\frac{m\,\omega}{A}-\frac{m\,\omega}{A'}\right)^2}$$

Se observa todavia que la disminucion de velocidad seria insensible si ω estuviera mui pequeño respecto de A i A'.

De la contraccion de la vena líquida.

La fórmula de Bernouilli no nos puede dar ningun dato sobre la contraccion de la vena; en efecto, ella permite solo calcular la velocidad del líquido en la seccion contraída.

Apliquemos a toda la masa del líquido comprendido entre el nivel superior AB (fig. 65) i la seccion contraida EF el teorema jeneral de las proyecciones de las cantidades de movimiento.

Adoptemos, como eje de proyeccion OX, una paralela a la velocidad v del líquido en la seccion contraida i supongamos que su sentido sea el de la velocidad v; sea ω el área de la seccion contraida; entre dos momentos t i $t+dt$ una masa de líquido igual a $\rho\,\omega\,v\,dt$ sale del depósito; por otra parte, el nivel AB baja de una cantidad correspondiente; la proyeccion sobre OX, de la cantidad demovimiento del líquido que sale es

$$\rho\,\omega\,v\,dt\times v$$

i la proyeccion sobre el mismo eje de la cantidad de movimiento de la masa líquida que ha bajado en AB, es

$$\rho\,\omega\,v\,dt\times P^{\mathrm{t}}_{\mathrm{x}}\,v_0$$

La cantidad de movimiento de la parte intermediaria de la masa total del líquido ha quedado la misma, puesto que el movimiento es permanente, luego se tiene simplemente

$$d\,\Sigma\,P_{\mathrm{x}}{}^{t}\,mv=\rho\omega\,v\,dt\,(v-P^{\mathrm{t}}_{\mathrm{x}}\,v_0)$$

La velocidad v_0 es mui pequeña respecto de v porque el área de la seccion AB es en jeneral mui grande respecto de EF, se puede por consiguiente despreciar $P_x{}^t\, v_0$ delante de v i se tiene simplemente

$$(2) \qquad \frac{d\sum P^t_x\, mv}{dt} = \rho\, \omega\, v^2$$

Debemos escribir que esta espresion es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas esteriores; éstas son: 1.° la pesantez; 2.° la presion atmosférica sobre AB; 3.° las presiones de las paredes del depósito sobre el líquido; 4.° el rozamiento sobre las paredes; 5.° la presion atmosférica sobre la porcion de la vena líquida comprendida entre CD i EF.

Representemos el peso total del líquido por Mg, la presion atmosférica sobre AB por F_{ab} i la presion del líquido sobre un elemento $d\omega'$ de pared por $p_m\, d\omega'$, la presion del elemento $d\omega'$ de pared sobre el líquido será $-p_m\, d\omega'$. El rozamiento de las paredes deberá ser sensible sólo en la proximidad del orificio i su proyeccion sobre OX será sensiblemente nula, la despreciaremos; sea, por otra parte, Ω el area del orificio; la proyeccion, sobre OX, de la presion atmosférica que obra sobre la porcion de la vena líquida comprendida entre CD i EF es igual a $-p_a\,\Omega$; se tiene por consiguiente

$$(3) \qquad \sum P^t_x\, F = P^t_x\, Mg + P^t_x\, F_{ab} - \sum P^t_x\, p_m\, d\omega' - p_a\,\Omega$$

Supongamos que $p_r\, d\omega'$ i $p\,\Omega$ sean las presiones del líquido en reposo sobre $d\omega'$ i Ω, se tiene

$$P^t_x\, Mg + P^t_x\, F_{ab} - \sum P^t_x\, p_r\, d\omega' - p\,\Omega = 0$$

Por otra parte, en el caso del reposo, la presion p sobre el orificio es igual a $p_a + \rho g h$, luego

$$P^t_x\, Mg + P^t_x\, F_{ab} = + \sum P^t_x\, p_r\, d\omega' + (p_a + \rho g h)\,\Omega$$

Sustituimos en la ecuacion (3) tendremos

$$\Sigma P_x^t F = \Sigma P_x^t p_r d\omega' + (p_a + \rho g h)\,\Omega - \Sigma P_x^t p_m d\omega' - p_a \Omega$$

O bien

$$(4) \qquad \Sigma P_x^t F = \rho g h \Omega + \Sigma P_x^t (p_r - p_m)\, d\omega'$$

Finalmente, si se igualan los segundos miembros de (2) i (4) se obtiene

$$\rho \omega v^2 = \rho g h \Omega + \Sigma P_x^t (p_r - p_m) d\omega'$$

Ahora, la velocidad v es igual a $\sqrt{2gh}$, luego

$$2 \rho \omega g h = \rho g h \Omega + \Sigma P_x{}^t (p_r - p_m)\, d\omega'$$

O bien

$$(5) \qquad \frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{\Sigma P_x^t (p_r - p_m)\, d\omega'}{2 \rho g h \Omega}$$

El movimiento del líquido, en el interior del depósito, es solo sensible en la proximidad del orificio de salida i las presiones en estos puntos son evidentemente mas pequeñas cuando el líquido está en movimiento que cuando está en reposo; de ahí resulta que, en el último término de la ecuacion (5), los elementos de área $d\omega'$ se refieren a una rejion próxima del orificio; las presiones $(p_r - p_m)\, d\omega'$ son entónces sensiblemente dirijidas segun OX i su proyeccion sobre OX es positiva.

La razon $\frac{\omega}{\Omega}$ se designa jeneralmente con la letra m; se dice entónces que m es el *coeficiente de contraccion.*

Como el último término de (5) es positivo, el coeficiente de contraccion m debe ser mayor que 0,50; es efectivamente lo que indica la observacion, pues se obtiene, en jeneral,

$$m = 0{,}62$$

Comprobacion de la fórmula (5) por medio del tubo adicional de Borda.

El tubo adicional de Borda es un pequeño cilindro que penetra en el interior del depósito; las paredes del depósito, próximas del orificio de salida, son entónces constituidas por el cilindro mismo, luego la suma de las proyecciones sobre OX, de las presiones $(p_r - p_m)\, d\omega'$ es igual a cero; la fórmula se reduce entónces a

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{2}$$

Este resultado es efectivamente comprobado por la observacion.

Contraccion incompleta.

En algunos casos, una parte del perímetro del orificio se encuentra en la prolongacion de las paredes del depósito, como, por ejemplo, cuando, en un depósito de forma prismática, el orificio de salida se encuentra en uno de los ángulos de la cara inferior. La vena líquida no es entónces contraída en toda su periferia se dice que la contraccion es incompleta.

Sea f la fraccion del perímetro del orificio sobre la cual la contraccion ha sido suprimida, la observacion conduce a adoptar un coeficiente de contraccion m', tal que

$$m' = 0{,}62\ (1 + 0{,}14 f)$$

II

TUBOS ADICIONALES

Ya hemos hablado mas arriba del tubo de Borda; éste no tiene otro objeto sino el de compromar la fórmula establecida mas arriba para el valor del coeficiente de contraccion.

Entre los otros tubos adicionales distinguiremos: 1.° el tubo gradualmente estrechado; 2.° los tubos cilíndricos; 3.° los tubos cónicos.

1.° Tubo gradualmente estrechado.

El tubo gradualmente estrechado es constituido jeneralmente por la pared misma del depósito; el orificio se abre de tal manera que su forma sea sensiblemente la de la vena líquida que sale del orificio en pared delgada. Es bien evidente que los diámetros estremos D i D' del orificio i el espesor de la pared deben, para esto, satisfacer a las proporciones

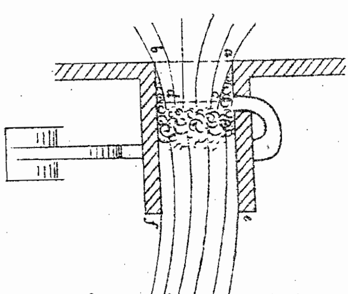
$$\frac{D}{1} = \frac{D'}{\sqrt{0{,}62}} = \frac{E}{\frac{1}{2}}$$

O bien, aproximadamente,

$$\frac{D}{10} = \frac{D'}{8} = \frac{E}{5}$$

Se averigua, por la medida del gasto, que la vena líquida no sufre ninguna contraccion a su salida en el aire como debe su ceder evidentemente. La utilidad de este tubo adicional no es mui grande puesto que el gasto no aumenta; se observa solo que la vena líquida es mas homojénea a la salida; su empleo, en la práctica, es casi nulo.

Fig. 68



2.° Tubos adicionales cilíndricos.

Sea (fig. 68) ae, bf la seccion lonjitudinal del tubo; lo supondremos horizontal. La vena líquida, al salir del depósito, se contrae en cd; en seguida se ensancha i llena el tubo hasta la salida en ef.

Sea m el coeficiente de contraccion; en la seccion contraída cd la velocidad del líquido sera v i la presion p; apliquemos la fórmula de Bernouilli entre esta seccion i el nivel superior del líquido en el depósito; se sabe que no hai entónces pérdida de carga, luego se tiene

$$z+\frac{p}{\pi}+\frac{v^2}{2g}=z_0+\frac{p_0}{\pi}+\frac{v_0{}^2}{2g}$$

Reemplazaremos z_0-z por h, p_0 por la presion atmosférica p_a i despreciaremos $v_0{}^2$; tendremos

(6) $$\frac{v^2}{2g}=h+\frac{p_a-p}{\pi}$$

Apliquemos la misma fórmula de Bernouilli entre la seccion de salida ef i el nivel superior del líquido en el depósito; habrá, en este caso, una pérdida de carga P; sea v' la velocidad en ef, la presion sera p_a luego

$$z'+\frac{p_a}{\pi}+\frac{v'^2}{2g}=z_0+\frac{p_a}{\pi}-P$$

De ahí se deduce

$$\frac{v'^2}{2g}=h-P$$

Por otra parte

$$P=\frac{(v-v')^2}{2g}$$

Luego

(7) $$\frac{v'^2}{2g}=h-\frac{(v-v')^2}{2g}$$

Finalmente

(8) $$v'=mv$$

Las tres ecuaciones (6), (7), (8) resuelven completamente el problema.

De (7) i (8) se deduce, en primer lugar

$$v' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}\sqrt{2gh}$$

Reemplacemos m por 0,62, se obtiene

$$v' = 0{,}85\sqrt{2gh}$$

Sea ω el área de la seccion normal del cilindro, el gasto será

$$Q = 0{,}85\,\omega\sqrt{2gh}$$

La esperiencia da

$$Q = 0{,}82\,\omega\sqrt{2gh}$$

Se ve que la concordancia es mui suficiente

Ahora la ecuacion (6) da

$$\frac{p_a - p}{\pi} = \frac{v^2}{2g} - h = \frac{v'^2}{2gm^2} - h$$

O bien

$$\frac{p_a - p}{\pi} = \left(\frac{\overline{0{,}82}^2}{m^2} - 1\right)h = 0{,}75\,h$$

Se averigua en efecto, por medio de un piezómetro, (fig. 68), que la presion p en la seccion contraída es menor que la presion atmosférica p_a i que la diferencia de las alturas representativas de estas dos presiones es sensiblemente igual a $\frac{3}{4}$ h. La concordancia entre la teoría i la observacion es pues suficiente.

Cálculo de la pérdida de carga.

Se tiene la relacion

$$\frac{v'^2}{2g} = h - P$$

Por otra parte hemos obtenido, por la observacion,

$$\frac{v'^2}{2g} = \overline{0{,}82}^2\, h = 0{,}67\, h$$

Por consiguiente

$$P = h - 0{,}67\, h = 0{,}33\, h = \frac{1}{3}\, h$$

La pérdida de carga es por consiguiente la tercera parte de la altura h.

3.° Tubos adicionales cónicos.

Cuando el tubo cónico es diverjente el fenómeno pasa sensiblemente de la misma manera como en el caso del tubo cilíndrico, pero la pérdida de carga es mayor, porque la diferencia de velocidades a la entrada i a la salida del tubo son mayores en el primer caso que en el segundo.

Cuando el tubo cónico es converjente, hai a la vez pérdida de carga en el interior del tubo i contraccion de la vena líquida a la salida; el gasto es entónces afectado de un coeficiente que representa a la vez las dos acciones i que es igual al producto de los coeficientes relativos a cada accion considerada separadamente.

La forma de la parábola que describe la vena líquida a su salida del tubo cónico permite determinar la velocidad, ésta será el producto de $\sqrt{2gh}$ por cierto coeficiente μ, menor que uno i debido a la pérdida de carga en el interior del tubo. Por otra parte, el gasto será el producto del área de la seccion de salida por la velocidad $\mu\sqrt{2gh}$ i por cierto coeficiente de contraccion m; luego la medida del gasto permite calcular el producto μm de estos dos coeficientes. Se han hecho esperimentos sobre varios tubos cónicos converjentes cuyos ángulos variaron entre 0° (tubo cilíndrico) i 180° (orificio en pared delgada) i se han obtenido los siguientes resultados:

Angulo del cono	Coeficiente de contraccion.	Coeficiente de la velocidad.	Coeficiente del gasto.
	m	μ	$m\,\mu$
0°	1,00	0,82	0,82
12°	0,99	0,96	0,94
30°	0,92	0,98	0,90
49°	0,86	0,98	0,85
180°	0,62	1,00	0,62

Se ve que el máximo de gasto corresponde al ángulo de 12°.

A. OBRECHT

(Continuará).