LA TRISECCION DEL ÁNGULO

Historia i consideraciones jenerales.—Algunas soluciones analíticas i otras mecánicas propuestas por jeómetros antiguos i modernos.—Imposibilidad de una solucion gráfica.

*
* *

El problema de la triseccion del ángulo, tal como lo propusieron los antiguos jeómetras, consistia en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, sirviéndose esclusivamente de la regla i del compas comun. Como tendremos ocasion de verlo mas adelante, el problema propuesto en tales condiciones no admite solucion. A pesar de que esta imposibilidad no ha podido ser establecida sino despues de la aplicacion de las teorías aljebráicas a los procedimientos jeométricos, parece que los antiguos jeómetras, vista la inutilidad de sus esfuerzos para resolver *gráficamente* este problema, consideraron que esa imposibilidad existia realmente, por mas que ellos no pudiesen demostrarla. Un testimonio fehaciente, de la verdad de lo que afirmamos, es el hecho mismo de haberse ideado en la época de *Nicomedes* la construcion de instrumentos especiales para trazado de curvas determinadas, que proporcionan medios de obtener la solucion, no ya gráficamente, sino mecánicamente, si con esta palabra hemos de espresar la circunstancia del empleo de otros mecanismos diversos del compas comun i de la regla, o sea, de otros elementos jeométricos distintos de la circunferencia de círculo i de la línea recta.

En el curso de este somero estudio histórico, tendremos ocasion de conocer algunos de esos mecanismos especiales, así como tambien, algunas de las mas sencillas soluciones teóricas, o, mejor dicho, analíticas, que se han propuesto desde cerca de dos siglos ántes de J. C.

* * *

La verdad es que no hai un testimonio positivo acerca de la época precisa en que fué propuesto el problema en que nos ocupamos. Sin embargo, todo hace suponer que su antigüedad data desde la época de *Platon* (1).

Despues de haber dividido un ángulo rectilíneo en dos partes iguales, la primera cuestion que en órden a este jénero de investigaciones debió proponerse, fué, sin duda, dividirlo jeométricamente en tres partes iguales. Con todo, es probable que este problema no fuese mas que un caso especial del de la division gráfica en partes proporcionales, que es tan antiguo como *Platon*. La *Cuadratriz*, curva ideada por *Dinostrato* (2), filósofo de la Academia o escuela platónica, parece haber sido construida para resolver el problema anterior.

Es, pues, de presumir que algunas de las antiguas soluciones teóricas de este problema sean debidas á la escuela citada, a la cual la jeometría debe muchas de sus mas importantes teorías.

A pesar de todo, no hai noticia histórica alguna que nos im-

(1) *Platon* nació el año 430 i murió en 347 ántes de J. C. Fundador de la Academia que lleva su nombre, hizo inscribir en la puerta de su escuela estas palabras: «*Nadie entre aquí si no es jeómetra*».

(2) Algunos historiadores creen que la cuadratriz fué ideada por *Hippias de Elis*, cerca de 420 años ántes de J. C., para resolver el problema de la triseccion i que *Dinostrato* le dió el nombre de *cuadratriz* porque la aprovechaba para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

pida suponer que el problema en estudio no sea mas antiguo que *Platon*, ni aun mas que *Pitágoras* (3).

Entrando en materia, empecemos por dar a conocer de entre las mas antiguas soluciones teóricas, dos de las mas sencillas, de las cuales no son mas que injeniosas variantes las de los jeómetras modernos; todas producto de la prodijiosa fecundidad de los métodos jeométricos.

1.ª) Sea ACB el ángulo que se quiere trisecar. Desde el vértice C como centro i con un rádio arbitrario CB, describamos la semicircunferencia BAG. Se trata de trazar por A una recta tal, que la lonjitud EF, interceptada entre la circunsferencia i la prolongacion del diámetro BG, sea igual al rádio CB (fig. 1)

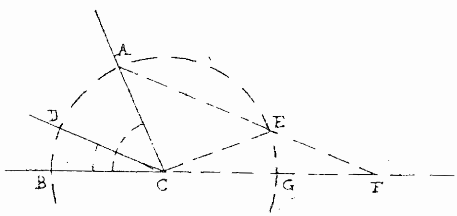


Fig. 1

(4). Si jeométricamente pudiese trazarse la recta AF, el problema estaria definitivamente resuelto. En efecto, el triángulo CEF seria isósceles; i si llamamos α cada uno de los ángulos de la base, se tendria que el ángulo esterno AEC, igual a la suma de los internos opuestos, seria igual a 2α. Pero tambien el triángulo ACE es isósceles, i en consecuencia ángulo $EAC = 2\alpha$. Ahora bien, el ángulo BCA es esterno del triángulo ACF; su valor será: $2\alpha + \alpha = 3\alpha$, ya que debe ser igual a la suma de los internos opuestos. Por consiguiente, el ángulo AFB seria igual a la tercera parte del ángulo ACB.

---

(3) *Pitágoras*, jefe de la escuela itálica ó Pitagórica nació el año 584 ántes de J. C.

(4) Esta figura corresponde probablemente al teorema 8 de *Arquímides*.

2.ª) Sea BAC el ángulo que se quiere trisecar. Construyamos el rectángulo $ABCD$ de modo que los lados del ángulo sean el uno *diagonal* i el otro un *lado* del rectángulo. Se trata de trazar por A una recta tal, que la parte EF interceptada entre las rectas CB i CF sea igual al doble de la diagonal AC (fig. 2). Como en el caso anterior, si jeométricamente pudiera trazarse la recta AF, el problema quedaria solucionado. En efecto, si trazamos por H, punto medio de EC, la recta HG paralela a DF, el punto G, de interseccion de HG con AF, sería tal que $EG = GF$; i si unimos G con C, se verificará que $GC = AC = GF$; de donde se deduce que los triángulos GCF i AGC serán isósceles,

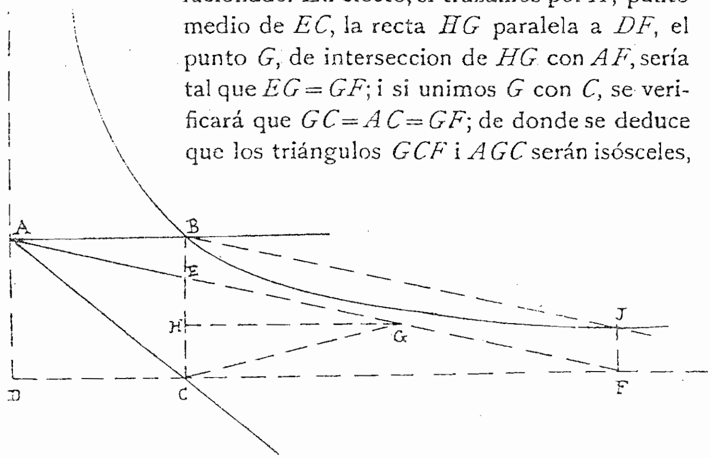


Fig. 2

i, en consecuencia, si α es el ángulo GFC: áng. $AGC =$ áng. $GAC = 2\alpha$. Ahora bien: áng. $BAC =$ áng. ACD; i como el ángulo ACD es igual a $2\alpha + \alpha = 3\alpha$, se sigue que el ángulo BAC es tambien igual a 3α. En otros términos: áng. $AFD = \frac{1}{3}$ áng. BAC.

Hemos dicho que, en los dos casos estudiados, si se pudiese trazar jeométricamente la recta AF el problema quedaria resuelto. Pues bien, no hai método puramente jeométrico para efectuar el trazado de esa recta.

Hé aquí como los antiguos jeómetras creyeron salvar la dificultad: para el caso de la figura 1 aplicaban sobre una regla la lonjitud $EF = CE$ i por una série de tanteos, valiéndose de un doble movimiento, (rotacion alrededor de A, i traslacion en la direccion de AF) hacían que a la vez que el canto de la regla pasase por A, los puntos E i F se colocasen, el primero sobre la circunferencia i el segundo sobre la línea BF. Para el caso de la figura 2, marcaban sobre la regla la lonjitud $EF = 2AC$ i por una série de tanteos, como anteriormente, hacían que, a la vez que el canto de regla pasaba por A, los puntos E i F se colocasen, el primero sobre la línea CB, i el segundo sobre la CF.

Mr. Bergery, a quien volverémos a encontrar mas adelante, atribuye a *Woisard* este método por tanteos. Sin embargo, hai razones para creer que no sea de ningun jeómetra de este siglo, si no tan antiguo como la escuela platoniana. Por lo ménos se puede asegurar que él era conocido por *Pappus* de Alejandría.

A pesar de esto, no hace muchos años hubo quien lo divulgó aquí en Chile como un descubrimiento de propia cosecha.

Como no podia ménos de suceder, esos procedimientos por tanteos no fueron aceptados. Los esfuerzos se dirijieron a encontrar la solucion jeométrica de los dos casos citados, es decir, a encontrar un medio de poder efectuar el trazado de la recta AF. Despues de un gran número de tentativas infructuosas que no habian producido mas que paralojismos i falsas soluciones, se abandonó la idea de resolver *jeométricamente* el ya famoso problema de la triseccion del ángulo, i se pensó entónces en solucionarlo teórica o analíticamente, o por medio de aparatos especiales.

Pappus (5) en su obra (συναγωγή sinagoge, coleccion) *Collections Mathematiques I, 4, prop. 31-32* relata la série de procedimientos injeniosos de una i otra especie que habian sido propuestos hasta su época.

Veamos algunos.

El método estudiado en la figura 2, se reduce, como es fácil observarlo, a la determinacion de un punto F sobre la prolongacion de BC, punto tal que unido con A se obtenga $EF = 2AC$. (Fig. 2).

Construyamos el paralelógramo $BEFJ$; es claro que el punto F depende ahora del punto J. Que el punto J pertenece

(5) *Pappus* de Alejandría vivió en el siglo IV de nuestra era, o mas probablemente, segun historiadores de fama, en el siglo III.

a la vez a una circunferencia de círculo de rádio $BJ = 2\,AC$ i a una hipérbola definida por la condicion de pasar por el punto B i por tener las rectas DA i DC como asintotas, es cuestion fácilmente demostrable.

La interseccion de esas dos líneas determina, pues, el punto J. Bajando la ordenada JF se obtiene el punto F. En efecto, $BJ = EF = 2\,AC$.

Pero, a fin de salir del márjen estrecho de buscar la solucion por medio de las figuras 1 i 2, se hacia necesario practicar investigaciones por otros métodos.

Se empleó entónces la hipérbola de una manera diferente a la anterior, fundándose en una propiedad característica de esta curva, propiedad de que solo goza cuando sus asintotas forman un ángulo de 120°.

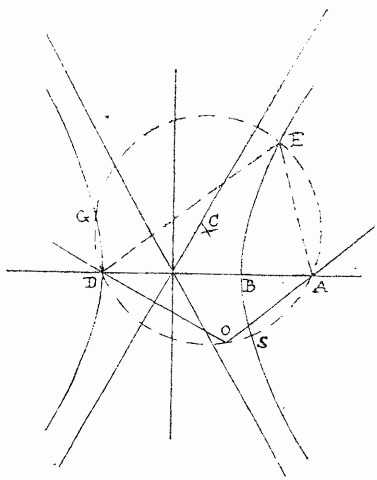


Fig. 3

Sea, pues, la hipérbola de la figura 3, cuya asintotas forman este ángulo.

Si se toma la abcisa $BA = \frac{1}{2} DB$ i se trazan las rectas DE i AE, que unen los puntos D i A con uno cualquiera elejido sobre la hipérbola, se verifica que el ángulo EAD es igual a dos veces el ángulo EDA; i por consiguiente si sobre DA como cuerda se describe el segmento DOA capaz del ángulo $AOD = a$ que se quiere trisecar, se obtendrá en EDA el ángulo $\frac{1}{3}a$

Es de observar que la circunferencia descrita sobre AD como cuerda corta a la hipérbola en otros puntos tales como S, G, i D. De tal modo que se tendrá tambien:

$$\text{Arc. } A\,S = \frac{1}{3}\text{Arc. } A\,S\,D = \frac{1}{3}(360^\circ - A\,E\,D)$$

$$\text{i Arc. } A\,S\,G = \frac{1}{3}(360^\circ + A\,E\,D)$$

En cuanto al punto D, no se tomará en cuenta. El se obtendrá siempre, cualquiera que sea el ángulo que se quiera trisecar.

En resúmen, se obtendria, si α es el ángulo en cuestion:

$$\text{Arc. } A\,E = \frac{1}{3}\,\alpha, \qquad \text{Arc. } A\,S = 120^\circ - \frac{1}{3}\,\alpha,$$

$$\text{Arc. } A\,S\,G = 120^\circ + \frac{1}{3}\,\alpha$$

lo que va indicando ya que el problema conduce a una construccion que debe dar tres valores diferentes, lo que está de acuerdo con lo que veremos mas adelante respecto al grado de la ecuacion a que da oríjen este problema.

Otra solucion— si así podemos llamar estos procedimientos teóricos—, no ménos injeniosa que las anteriores es la ideada por *Descartes*, valiéndose de la circunferencia i de la parábola.

Sea $B\,A\,C = \alpha$ el ángulo que se quiere trisecar (fig. 4). Desde

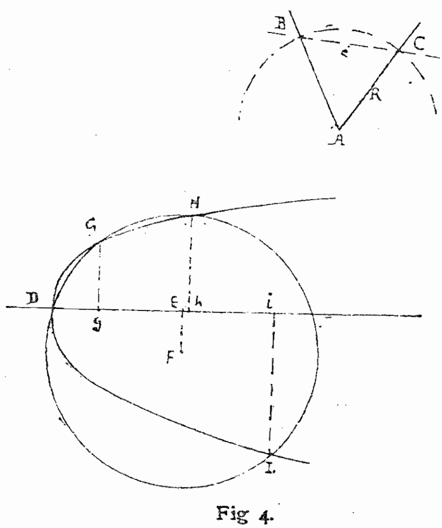


Fig 4.

el vértice A como centro i con un rádio arbitrario $A\,B = R$ describamos el arco de circunferencia $B\,C$.

Se trata de encontrar la cuerda del arco correspondiente al ángulo $\frac{1}{3}\alpha$.

Construyamos una parábola cuyo parámetro sea R $(y^2 = R\,x)$

Tomemos $D\,E = 2\,R$, a partir de la cúspide D i tracemos por E la normal $F\,E = \frac{1}{2}c$, siendo c la cuerda $B\,C$.

Desde F como centro i con un rádio $F\,D$ describamos una circunferencia que cortará a la parábola en los puntos $G\,H$ e I. Si trazamos las ordenadas $G\,g$, $H\,h$ e $I\,i$, tendremos:

$G\,g$, cuerda correspondiente al arco $\frac{1}{3}\,B\,n\,C$

$H\,h$, " " " " $\left(120^\circ - \frac{1}{3}\,B\,n\,C.\right)$

$I\,i$, " " " " $\left(120^\circ + \frac{1}{3}\,B\,n\,C.\right)$

Si continuásemos pasando en revista las numerosas soluciones basadas en las secciones cónicas, que se detallan en las obras mas conocidas de Jeometría analítica, estamos seguros que tendríamos material para un grueso volúmen. Bástenos, a este respecto, indicar las siguientes:

Partiendo de la ecuacion a que conduce este problema, cuando se toma el coseno de un ángulo en funcion del coseno del ángulo triplo, ecuacion de la forma:

$$x^3 + \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{4}\,a = 0 \qquad (1)$$

en la cual $x = \cos\frac{\alpha}{3}$ i $a = \cos.\alpha$, Mr. *L. de Fourcy* en su obra "*Leçons de Géométrie Analitique*" (páj. 334), indica las siguienteo soluciones:

Se puede descomponer la ecuacion (1) de varias maneras:

1.º) $$x^2 = K\,y$$

$$K\,x\,y - \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{4}\,a = 0$$

siendo K una constante arbitraria.

Estas ecuaciones indican que el problema se puede solucionar valiéndose de una parábola i de una hipérbola.

2.°) Multiplicando la ecuacion (1) por x se tiene:

$$x^4 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}a\,x = 0$$

De aquí pueden resultar las ecuaciones:

$$y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}a\,x = 0$$
$$x^2 = y$$

Luego, la cuestion puede tambien resolverse por medio de dos parábolas. Pero es preciso tener cuidado de rechazar el valor $x = 0$.

3.°) Sumando las dos últimas ecuaciones i tomando el sistema:

$$x^2 = y$$
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}a\,x = 0$$

se vé que una parábola i una circunferencia pueden tambien proporcionar la solucion.

La *cuadratriz*, que ya hemos mencionado, junto con su inventor, *Dinostrato*, o *Hippias de Elis*, resuelve tambien el problema; pero lo soluciona, digamos, por lo que se ha dado en llamar peticion de principio. En efecto, para resolverlo se necesita tener trazada la curva, i para trazarla es preciso poder dividir los arcos de circunferencia en partes proporcionales.

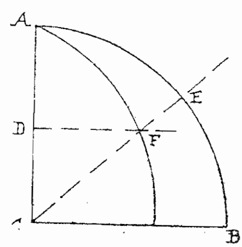


Fig. 5

La cuadratriz es el lugar jeométrico de los puntos F, de interseccion de un rádio móvil CE (fig. 5) i una ordenada móvil DF, sujetos ámbos a verificar, durante su movimiento, la proporcion:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{\text{arc. } BE}{\text{arc. } AB.}$$

Hemos indicado ya algunas de la numerosísimas soluciones analíticas imajinadas para solucionar el problema en estudio.

Es bueno observar una vez mas que ellas no satisfacen en todo su rigor al enunciado del problema, pues si bien es posible construir las secciones cónicas, esas construcciones no estan escentas de poderlas considerar como una especie de tanteo, circunstancia de la cual solo podrian eximirse si el trazado de dichas curvas pudiera hacerse por medio de un movimiento contínuo i valiéndose solo de la regla, para trazar rectas, i del compas.

* * *

Pasemos ahora a conocer algunas soluciones de las que denominamos *mecánicas* por intervenir en ellas instrumentos especiales, ya sean destinados a trazar curvas determinadas, ya sean simplemente trisectores, como el del *Padre Ceva,* por ejemplo.

Principiaremos por ocuparnos en la *conchoïde* de *Nicomedes* (6) i del instrumento ideado por él para trazarla.

La conchoïde es un lugar jeométrico definido así: se supone un punto fijo A i una recta fija $M\,N$. Por el punto A se traza una recta cualquiera $A\,D$ i sobre esta recta, a partir del punto D donde encuentra a $M\,N$ se toma $D\,C = D\,B$ e igual a una lonjitud constante a. El lugar en cuestion es la doble curva descrita por los puntos B i C cuando la recta $A\,D$ se mueve pasando siempre por A i conservándose constantes las magnitudes $D\,C$ i $B\,D$.

Resulta, como se ve, de la interseccion sucesiva de la recta $A\,C$, que jira alrededor de A, por una circunferencia cuyo radio constante es igual a $DC = DB$, que se mueve segun MN; de manera que su centro se encuentre siempre en la interseccion de $A\,C$ con MN.

---

(6) Nicomedes *(Nikomede)* vivió en el siglo segundo ántes de nuestra era.

Si llamamos b la distancia del punto fijo A a la recta fija $M\ N$ puede suceder que:

$a < b$; i en este caso la rama inferior o segunda rama tendrá la forma de la figura 6.

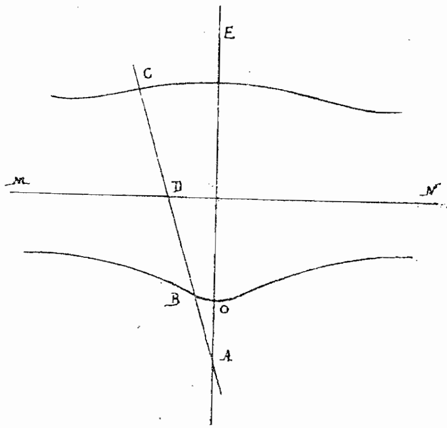


Fig. 6

$a = b$; la forma de la segunda rama será la de la figura 7.

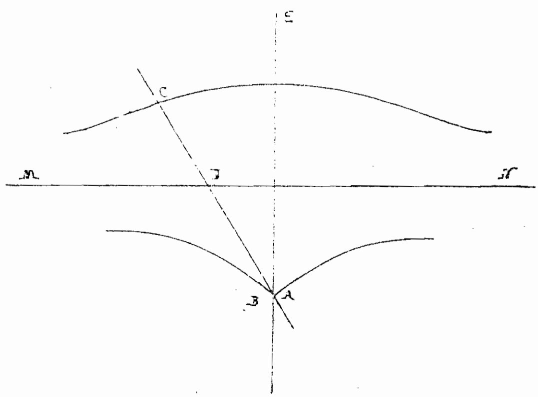


Fig 7

$a > b$; la forma de la segunda rama será la de la figura 8.

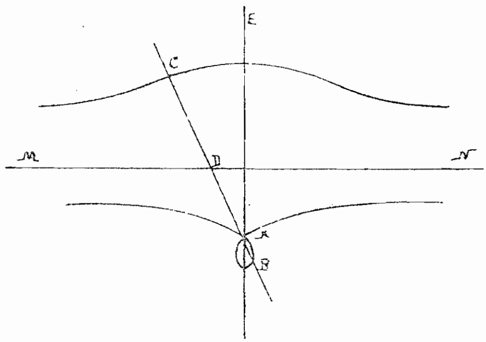


Fig. 8

Esta variedad en la forma de la parte inferior de la curva fué establecida por los antiguos jeómetras, empíricamente.

Hoi que se ha establecido la ecuacion de la curva:

$$\rho = a + \frac{b}{\cos \theta}.$$

se puede demostrar que la forma de la rama inferior es diversa segun que a sea mayor, igual, o menor que b; así como tambien se puede demostrar que la recta $M\ N$ es una asíntota de la curva.

Referida a un sistema de ejes coordenados, de orijen A, i de eje de abrisas AE, la ecuacion de la curva seria:

$$y_1^2 = \frac{x^2\ (a^2 - (x-b)^2}{(x-b)^2}$$

En cuanto al instrumento destinado a trazar la conchoïde, está compuesto, como se ve en la figura 9, de una regla T i de una reglilla $M\ N$ provista de una ranura lonjitudinal, dos trazadores C i B, i un estilete D. ajustables, de manera que puedan

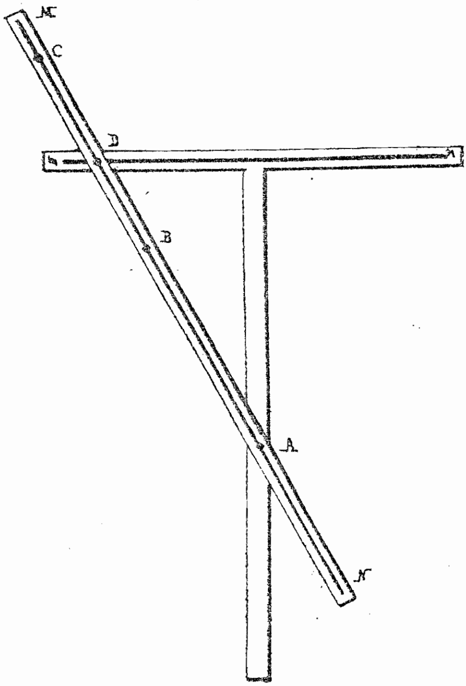


Fig 9

colocarse en posiciones tales que verifiquen la igualdad

$$D\,C = D\,B = a$$

El estilete D de la reglilla penetra en una ranura $m\ n$ practicada en la rama mas corta de la T a la vez que un estilete A fijo a la rama larga penetra en la ranura de la reglilla.

Estando los puntos C, D, B i A en línea recta (condicion que debe satisfacer el instrumento, por construccion), si se mueve la reglilla, los puntos C i B describirán las dos ramas de la conchoïde, pues la recta que une los puntos C, D, B i A pasa siempre por el punto fijo o polo A, a la vez que se mantienen invariables las distancias $D\ C$ i $D\ B$.

Veamos ahora cómo puede aplicarse la curva i el instrumento de que venimos hablando a la resolucion del problema de la triseccion del ángulo. (7)

1.º Sea $A\ C\ D$ el ángulo que se quiere trisecar (fig. 10.)

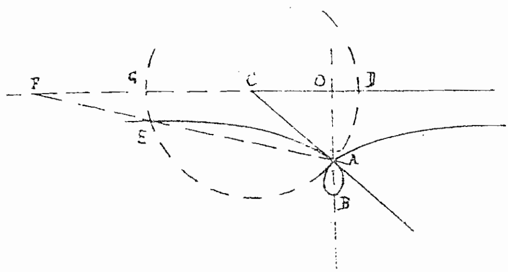


Fig. 10

Desde el vértice C como centro i con un rádio arbitrario CA describamos la semi-circunferencia $D\ A\ G$.

Dispongamos ahora el instrumento de manera que el punto A coincida con el polo, que la recta fija sea $G\ D$ i que la distancia constante $O\ B = a$ sea igual al radio de la circunferencia ya trazada. Es claro que si en estas condiciones hacemos que el trazador B describa la rama inferior de la curva se obtendrá, en su interseccion con la circunferencia un punto E tal, que unido con A debe dar

$$F\ E = C\ A = o\ B$$

i el ángulo $C\ F\ E$ será la tercera parte del $A\ C\ D$.

Como la magnitud constante $o\ B$ debe ser igual al radio, i el

(7) Esta curva ha sido tambien aplicada, por los arquitectos, al trazado del galibo de las columnas. Se puede consultar, al respecto, la *Arquitectura de F. Blondel* i la de *D'Aviler*, así como la traduccion de *Vitruve* por *Perrault*.

polo del instrumento debe colocarse sobre la circunferencia, se comprende que solo es aplicable a este caso la construccion en que la segunda rama de la curva es la de la figura 8 i el de la figura 7 cuando el ángulo en cuestion es $\frac{\pi}{2}$

2.° Sea $C\ A\ B$ (fig. 11) el ángulo por trisecar. Construyamos el rectángulo $D\ A\ B\ C$ i prolonguemos el lado $D\ C$.

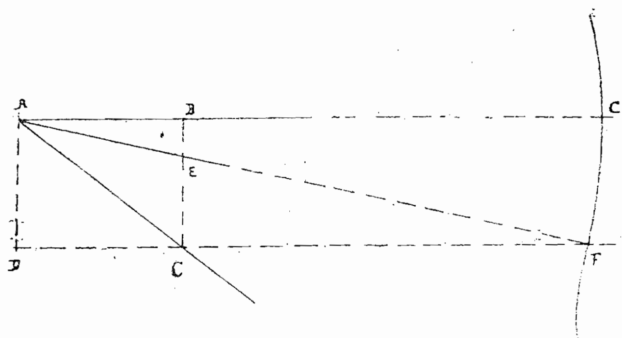


Fig. 11

Se dispondrá ahora el instrumento de tal manera que el polo coincida con A, que la recta fija sea $B\ C$ i que la distancia constante $B\ C$ sea igual a $2\ A\ C$. Si en estas condiciones se hace que el trazador c describa la rama superior de la conchoïde, ésta cortará a la prolongacion de $D\ C$ en un punto F tal que unido con A, se tiene:

$$E\ F = 2\ A\ C$$

i el ángulo $B\ A\ E = A\ F\ D$ será la tercera parte del $B\ A\ C$.

Newton, estableciendo una regla jeneral para resolver por medio de la conchoïde de *Nicomedes* todos los problemas que, como el de la division en partes proporcionales, son del mismo órden que el de la triseccion, encontró para éste el siguiente medio de solucionarlo.

Sea $A\ C\ B$ el ángulo que se quiere trisecar. (fig. 12) Trace-

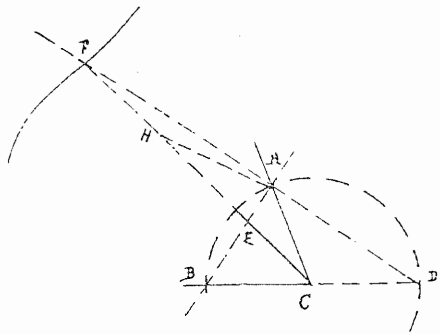


Fig. 12

mos la semi-circunferencia $B\ A\ D$, la cuerda $B\ A$ i la secante $D\ A\ F$. Se trata de intercalar entre los lados del ángulo recto $F\ A\ B$ una recta tal, que a la vez de pasar por C intersecte entre los lados del ángulo recto una lonjitud $F\ E$ igual al diámetro de la circunferencia ya trazada.

Este resultado, como se comprende fácilmente. se obtiene colocando en C el polo del instrumento de *Nicomedes* i trazando la rama superior de la conchoïde.

Así obtenido el punto F, el ángulo $F\ C\ A$ será el buscado.

En efecto, si unimos el punto medio H de $F\ E$ con A se tendrán dos triángulos isósceles $F\ H\ A$ i $H\ A\ C$ i el ángulo en C del segundo triángulo será igual a dos veces el ángulo F del primero. Ademas el ángulo A del triángulo $C\ A\ D$ será igual a tres veces el ángulo F e igual tambien a la mitad del ángulo C del triángulo $B\ C\ A$. Se sigue de aquí que el ángulo $F\ C\ A$ será la tercera parte del $B\ C\ A$.

Mas claro. Sean α i β los ángulos de la base en los triángulos $F\ H\ A$ i $H\ A\ C$ respectivamente; sea γ el ángulo $C\ A\ D$ i δ el $B\ C\ A$. Se tendrá: $\beta = 2\ \alpha$, $\gamma = \beta + \alpha = 3\ \alpha$.

Por otra parte: $\gamma = \frac{1}{2}\delta$

luego: $\delta = 2\gamma = 6\alpha = 3\beta$

o sea: $\beta = \frac{1}{3}\delta$.

Un caso particular de la conchoïde de *Nicomedes* es la curva conocida con el nombre de *Limaçon de Pascal.* La ecuacion de esta curva es:

$$\rho = a + b \cos \theta$$

siendo las notaciones las de la figura.

Esta curva puede definirse así: se da una circunferencia i sobre ésta un punto A. Por el punto A se traza una série de secantes, tales como AP, i sobre esta secante, a partir de D se toman lonjitudes $DP_1 = DP_1 = C^{te}$. El lugar jeométrico de todos estos puntos es la limaçon de PASCAL, o *caracol*, como tambien se la denomina.

Lo mismo que para el caso de la conchoïde de *Nicomedes*, a

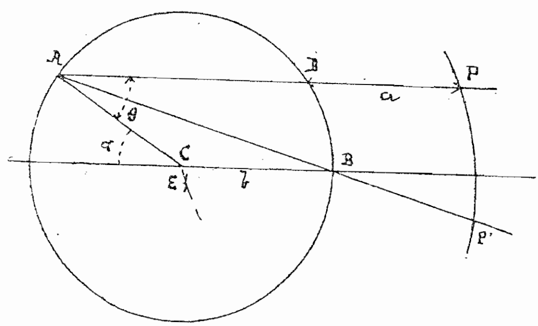


Fig. 13

puede ser mayor, igual o menor que b, i la forma de la curva depende de esta circunstancia.

Si $a > b$, la curva, lugar de los puntos P, afecta la forma de una concha, completamente esterior a la circunferencia;

Si $a = b$, la curva tiene en A un punto comun con la circunferencia;

Si $a < b$, la curva presenta en A un punto doble i una bucla interior a la circunferencia.

No hace muchos meses el ciudadano español *Fernández Cabello* mostró en una conferencia pública un instrumento destinado a efectuar el trazado de esta curva. En realidad el conferencista estudiaba el instrumento como un trisector—que es uno de los mas complicados que conocemos—sin indicar, talvez sin sospechar que el dicho trisector describia una curva definida i estudiada. Este instrumento, que no analizaremos, se encuentra detallado en un folleto impreso en Lima (1895), folleto que el autor dedica a don *Nicolas de Piérola i a los jóvenes de todo el mundo* (sic).

Un método mas sencillo de utilizar esta curva en la resolucion del problema de la triseccion es el que ha dado a conocer el señor *M. Dorlhiac.* Este método se encuentra espuesto en un artículo lijero publicado en el tomo XIII, entrega 4, correspondiente al 15 de Abril de 1898 de los *Anales del Instituto de Injenieros.*

Dorlhiac ha construido cerchas metálicas que afectan esteriormente la forma de la limaçon. Se usan estas cerchas lo mismo que un trasportador, i se aplican al método indicado en la figura 1.

Es claro que una cercha basta para trisecar cualquier ángulo α ya que $\frac{\alpha}{3}$ no depende del radio de la circunferencia ausiliar, que es la directriz de la curva. El aparato (fig. 14) tiene marca-

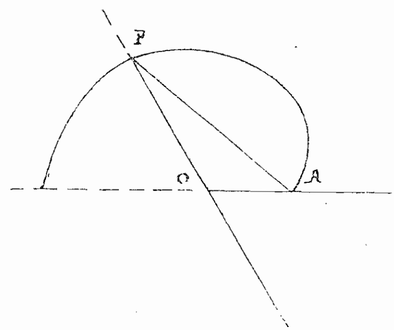


Fig. 14

dos sobre su base los puntos O i A, que son el centro de la circunferencia directriz i el punto fijo respectivamente. Se coloca

OA en coincidencia con uno de los lados del ángulo de modo que el centro O coincida con el vértice. Se marca sobre el lado en cuestion el punto A i sobre el otro lado el punto P en donde la curva lo intersecta. Si unimos P con A, el ángulo OPA será el tercio de BOA. Creemos innecesario demostrar esta circunstancia ya que ella es una consecuencia lójica de la naturaleza misma de la curva.

En realidad de verdad es este método por tanteos uno de los mas sencillos i prácticos de los que conocemos. No queremos decir con esto que es posible aceptarlo como una solucion del problema. Léjos de eso. Ademas de no estar sujeto a las condiciones impuestas, no deja de ser un simple tanteo; pero un tanteo capaz, eso sí, de proporcionar una esactitud relativa, suficiente para las necesidades de la práctica.

R. Fernández Frias, que ha buscado la solucion del problema i ha propuesto medios tan erróneos como complicados, ha caido en el grave error de creer que el arco de limaçon comprendido entre las secantes ADP, paralela a BC' i $AB'P'$ (fig. 13), era un arco de circunferencia de radio PC i de centro E, determinado por la interseccion de dos arcos de circunferencia de radio PC i de centros P i P'.

Un paralojismo tan manifiesto no se comenta. Basta enunciarlo para comprender a qué conclusion llegaríamos aceptándolo.

* * *

Pasamos, ahora, a ocuparnos del trisector del *P. Ceva.*

Se ha atribuido este instrumento al aleman *Walter Tchirnhausen* que nació el año 1672 (8). Pero la solucion del problema en estudio por medio de este trisector aparece indirectamente indicada en una obra que el padre jesuita *Thomas Ceva* publicó el año 1699. En dicha obra, intitulada *Opuscula mathematica* el padre *Ceva* hace consideraciones bastante injeniosas sobre el problema jeneral de la *multiseccion de un ángulo*, e indica algunas

(8) Segun otros historiadores, nació en 1631 i murió en 1708.

Se cree tambien que el trisector de Tchirnhausen es solo semejante al del P. Ceva. Véase: Act. Erud. Año 1695, páj. 290.

curiosas soluciones ya análiticas, por medio de curvas especiales; ya mecánicas, por medio del trisector, de que pronto nos ocuparemos.

En realidad no podemos asegurar a cuál de las dos personas nombradas pertenece este trisector.

No conocemos razones que induzcan a creer que el inventor sea *Tchirnhausen*, pero sabemos sí, que el *P. Ceva* aplicó este instrumento, no al caso particular de la triseccion, sino al caso jeneral de la multiseccion.

Sea como fuese, la construccion de este aparato está fundada en el siguiente teorema de jeometría: Si se prolongan dos lados concurrentes AB i AD de un rombo i si sobre esas prolongaciones se toman las lonjitudes DF i BE iguales entre sí, e iguales al lado del rombo, i si en seguida se unen estos puntos F i E con C se obtiene un ángulo FCE igual a tres veces el ángulo DAB. En efecto, tracemos la diagonal AC (fig. 15) i prolonguémosla. Los triángulos ADC i DCF serán isósceles i si designamos por β los ángulos de la base del triángulo ADC, es claro que el valor de los ángulos de la base del triángulo DCF será 2β. De aquí se deduce que el ángulo FCG, por ser igual a los internos opuestos del triángulo FCA, será igual a 3β.

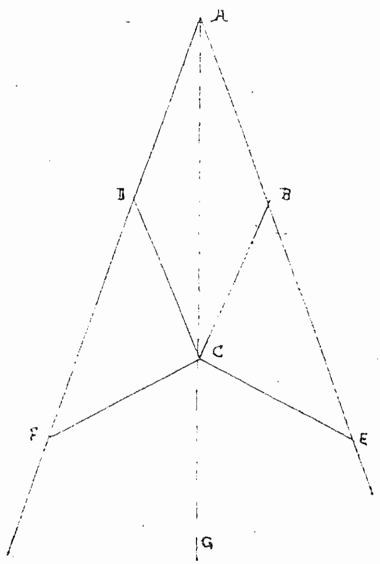


Fig. 15

Si observamos que CG es la bisectriz del ángulo FCE concluiremos por afirmar que:

$$\text{áng. } FCE = 3 \text{ áng. } DAB$$

Este teorema jeométrico se encuentra mecánicamente realizado en el trisector del P. *Ceva.* Está compuesto de dos reglas articuladas en A. Dos reglas mas pequeñas articuladas en D, B i C realizan un rombo $ABCD$. Finalmente en C hai articuladas otras dos reglas CE i CF, iguales entre sí, e iguales al lado del rombo; llevan sólidamente unidas en los puntos F i E, estiletes que penetran en ranuras lonjitudinales practicadas en las reglas AF i AE. Para usar el instrumento, bastará hacer coincidir el vértice del ángulo por trisecar con el punto C al mismo tiempo que se hará que los lados del ángulo coincidan con los cantos internos de las reglas CF i CE. El instrumento dará en A el ángulo buscado, lo que es evidente despues de la demostracion que hemos dado del principio en que descansa la construccion del instrumento.

Otro de los trisectores sencillos que mencionaremos es el que se encuentra descrito en el *Dictionaire universel* de Mr. *Pierre Larousse.*

La figura 16 ilustra por sí sola la disposicion del instrumento.

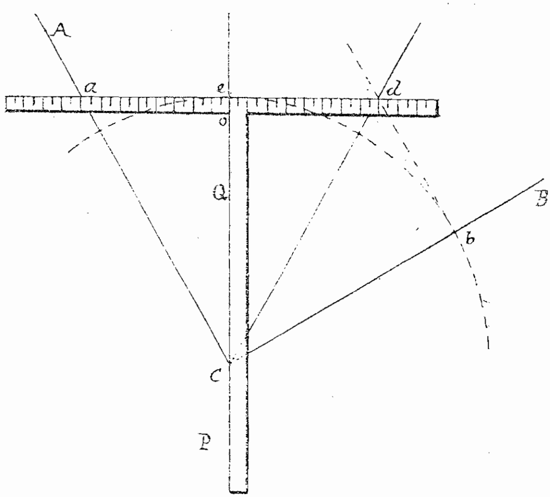


Fig. 16

Es una simple regla T cuya rama corta está graduada, a partir de un índice colocado en la prolongacion de uno de los cantos de rama larga, en ámbos sentidos. Veamos el modo de operar.

Sea ACB el ángulo que se desea trisectar. Colocamos la T de modo que el canto PQ coincida con el lado CB i trazamos la recta bd. Hagamos ahora jirar la T en torno del punto C de modo que el índice o describa una circunferencia de centro C i de radio Co, hasta que el mencionado índice se coloque en una posicion tal que la recta bd ya trazada, i el lado CA intercepten sobre la graduacion una magnitud igual, lo que se conseguirá por medio de una série de tanteos.

Conseguida esta posicion marcamos los puntos d i e, los unimos con el vértice C i trazamos la recta da. Se tendrán entónces los tres triángulos rectángulos aCe, eCd i dCb iguales entre sí. En consecuencia, los tres ángulos en C serán iguales entre sí, e iguales a la tercera parte del ángulo ACB.

*
* *

Mr. *C. L. Bergery* en sus lecciones públicas dadas en *l'hôtel de ville de Metz* a los obreros franceses, se espresaba, en órden al problema en que nos ocupamos, en los siguientes términos (1):

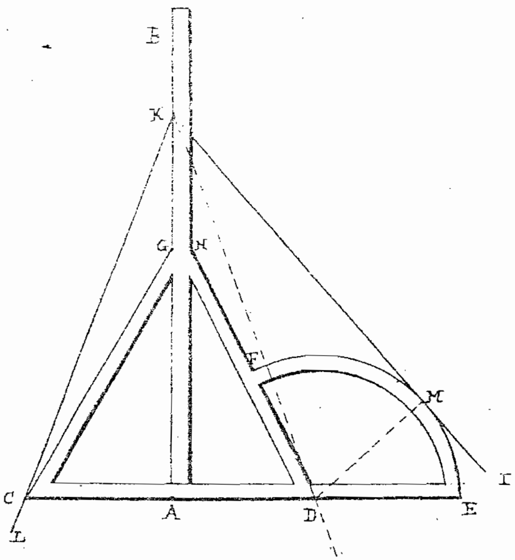
"No se podria con la regla i el compas, o trazando solamente líneas rectas i circunferencias, dividir un ángulo en tres partes iguales, pero existe un instrumento llamado *trisector* que opera mui simplemente esta division. Está compuesto de cuatro reglas i de una porcion de anillo circular. Estas piezas están ensambladas las unas a las otras de manera que la arista AB (fig. 17) es perpendicular a CD en su punto medio A, i que el punto D, medio de AE es el centro del arco de circunferencia EMF. Este arco tiene, por consiguiente, por radio:

$$DE = DA = AC$$

"Las reglas CG i DH no sirven sino para mantener invaria-
" ble la posicion perpendicular de AB sobre CD.

(9) Cours de Sciences industrielles *Géométrie appliquée à l'industrie.* Metz, 1825.

„Supongamos que se trata de dividir en tres partes iguales el ángulo IKL.



Fig, 17

„Debe colocarse el instrumento de manera que el vértice C se coloque sobre uno de los lados, KI por ejemplo, que la arista AB pase por el vértice K del ángulo i que el otro lado KI sea tanjente al arco de circunferencia, lo que se consigue por una série de tanteos.„

Cuando se ha conseguido que el instrumento esté en la posicion indicada, el ángulo AKL es el tercio del ángulo IKL, así como tambien los ángulos AKD y DKI son cada uno la tercera parte del IKL.

En efecto, esto se verificará siempre que los ángulos AKD, DKI y AKL sean iguales. Lo son, a todas luces, los ángulos AKL y $A.KD$ por ser opuestos a lados iguales en triángulos iguales.

En cuanto al ángulo DKI demostraremos que es igual a los dos anteriores trazando el radio DM y observando que los triángulos rectángulos DMK y DKA son iguales por tener la hipotenusa y un cateto iguales.

"Si el ángulo que se debe dividir es mui obtuso, el trisector no puede darnos directamente la tercera parte, pues será imposible colocarlo de modo que se cumplan a la vez las tres condiciones enumeradas. En este caso se divide el ángulo en dos partes iguales i se opera sobre una de ellas. Se obtiene así la sesta parte del ángulo total."

El trisector que acabamos de estudiar ha sufrido una serie de trasformaciones que pasamos a enumerar.

Desgranges (ebanista) ha suprimido las reglas oblícuas CG y DH, la primera de las cuales impide trazar de un estremo a otro de la regla AB, la recta que da el tercio del ángulo (fig. 18).

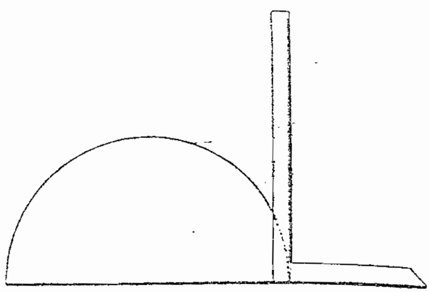
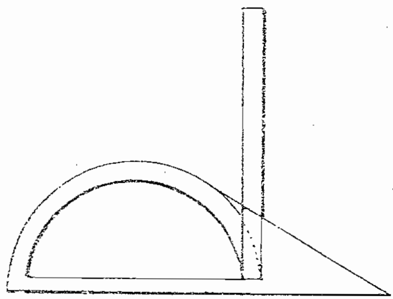


Fig. 18

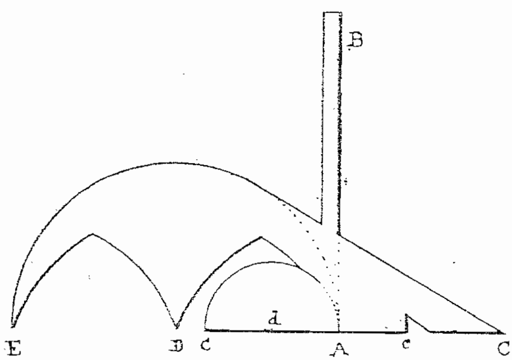
Lovrain (ebanista) ha sustituido a la porcion de regla AC una escuadra (fig. 19) cuya hipotenusa es tanjente a la semicircunferencia. El instrumento goza entónces de las mismas ventajas que el anterior i es mas sólido.

Aubry (carpintero) ha construido de una sola pieza un trisector que ha querido hacer capaz de trisecar ángulos bastante agudos. Al efecto, ha agregado al semicírculo primitivo otro mas pequeño (fig. 20) i ha practicado en la escuadra de Lovrain una pequeña muesca c. Si el ángulo no es bastante grande para que sea necesario servirse del punto C correspondiente al semi-



Fig, 19

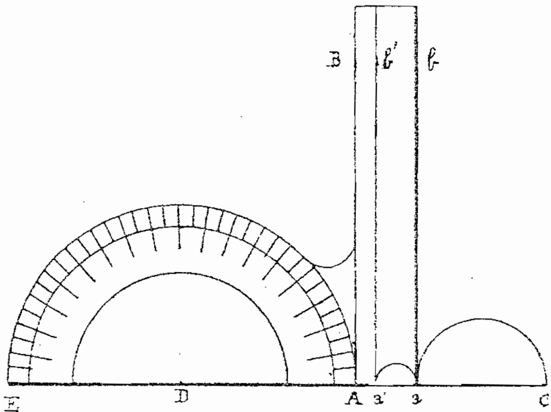
círculo de mayor radio, se emplea el punto c y el pequeño semicírculo cuyo diámetro Ae es igual a $2\ Ac$ así como $AE = 2\ AC$.



Fig, 20

Finalmente, y esta es la trasformacion mas completa del instrumento de la páj. 17.

Gury (fabricante de espejos) ha construido en cristal un trisector triple con un trasportador (fig. 21). Cuando la magnitud



Fig, 21

del ángulo no permite usar el punto C, la recta AB y la circunferencia esterior, se sirve del punto A, de la recta ab y de la circunferencia média cuyo diámetro Ca es doble de Aa, o bien se hace uso del punto A, de la recta $a'b'$ y de la circunferencia pequeña cuyo diámetro aa' es igual al doble de Aa'. La recta $a'b'$ así como la circunferencia pequeña, están grabadas sobre el cristal.

Al usar este instrumento es bueno no olvidarse de tomar precauciones que eviten los errores que puede causar el efecto de la refraccion.

* * *

No continuaremos revistando esta série de métodos mecánicos que se han propuesto para solucionar el problema de la triseccion. Creemos que los ejemplos citados son bastante para formarse una idea, siquiera aproximada de cuántos i cuan variados son los instrumentos que se han ideado por los jeómetras de todas las edades que han creido posible la solucion de este antiguo problema.

Sin embargo, no concluiremos esta parte de nuestro trabajo, sin mencionar algunos de los mas conocidos personajes que han dedicado parte de sus esfuerzos a la investigacion de un problema, desprovisto de toda utilidad práctica, i sin mas mérito que el de su antiguedad.

Orance Fine (Orantius Finæus) que adquirió gran celebridad por sus estudios sobre el movimiento de las aguas i otros puntos de mecánica, indicó algunas soluciones del problema de la duplicacion del cubo, de la division de la esfera en partes proporcionales, i de la triseccion. Esas soluciones, que a juicio de los matemáticos de su época no son sino paralojismos indignos del autor, se encuentran consignadas en la obra *De rebus Mathematisis hactenus desideratis* dada a luz en Paris en 1555. Fine fué refutado por Buteon, uno de sus discípulos i por un matemático portugues, justamente célebre, Pierre Nonius, o Nougnez, que escribió espresamente una obra intitulada "*De erratis Orantii.*"

Joseph Scaliger indicó tambien algunas soluciones que fueron refutadas por *Viète* i *Adrianus Romanus.*

El mismo *Viète* ha propuesto algunos procedimientos mecánicos en su obra *Suppl. Geom. Variorum de rebas math. respons* (1-8, c. 5, opera, p. 240).

Despues de él, *Huygens* ha dado un gran número en su obra *Illustrium quorund probl. constructiones*, (opera varia, páj. 388).

El mismo *Viviani* ha construido este problema de diversas maneras elegantes i nuevas, que se encuentran relatadas en la obra *Divin. in Aristæum, Solutio, probl. D. Comiers.*

Podríamos todavia citar muchos mas: *Delalean, Clerget, Liger*, etc., si no temiésemos abusar de la benevolencia de nuestros lectores.

En resúmen, podemos decir que casi no ha habido jeómetra de alguna reputacion que no haya pretendido encontrar el medio de solucionar el problema. Estas pretensiones justificables en otra época, no lo son a la fecha. Desde que las teorías aljebráicas han puesto de manifiesto la imposibilidad de resolverlo con los métodos de la jeometría ordinaria, es una pretension absurda, es luchar contra las ciencias, es retrogradar, pensar siquiera en que es posible encontrar un medio de combinar rectas i circunferencias para encontrar la solucion deseada.

Desgraciadamente, algunos matemáticos de nuestro pais han caido tambien en el error de creer posible este problema.

He aquí lo que, en sesion del 16 de Octubre de 1893 en el seno de la *Société Scientifique du Chili*, a propósito de una pretendida solucion del señor *M. Cádiz*, decia el señor *F. Lataste:*

"...Agradecería al señor *Obrecht* que tratase la cuestion de una manera un poco jeneral, *puisque une sorte d' épidémie semble s'être abattue sur les máthématiciens du pays* (10), *que publient de tous côtés, de prétendues solutions du problème de la trisection de l'angle et de quelques autres problèmes aussi fameux et vraisemblablement aussi insolubles.*"

Mas adelante insertamos la parte final de la contestacion del señor *Obrecht*.

Observaremos por fin, que todos, i casi todos, los medios que hemos estudiado, aparte de no constituir una solucion del problema, carecen del carácter de jeneralidad que debe revestir todo procedimiento jeométrico.

Hemos creido inutil insertar aquí los nombres del sin número de falsos trisectores que han propuesto soluciones jeométricas o sea basadas en el empleo esclusivo de la regla i del compas. La sola enumeracion de estas pretendidas soluciones podria ser materia suficiente para un estenso artículo.

Pasamos ahora a demostrar la imposibilidad de resolver el problema de la triseccion por medio de la jeometría elemental i sin mas ayuda que la regla y el compas.

Como una primera demostracion insertamos la parte final de la contestacion que el señor *Alberto Obrecht* dió al señor *Lataste* en la ocasion mencionada.

"Trátase ahora de dar una demostracion sencilla del porqué la triseccion del ángulo no se puede hacer con la regla i el compas.

"La posicion de la recta que divide el ángulo en tres será fijada por el vértice del ángulo dado i por la posicion de

(10) Parece que el señor Lataste ha querido referirse a los Cortinez, los Fernández Frías, los Reszka, los Cádiz, etc.

cierto punto del plano de la figura. La posicion de un punto se determina en jeometría por la interseccion de dos curvas. Si en el caso considerado las dos curvas son dos rectas, el punto es único i el problema de la triseccion tendrá una sola solucion; si las dos curuas son una recta i una circunferencia habrá ademas del punto buscado, otro que satisfará a la cuestion, es decir que el problema de la triseccion tendrá dos soluciones. En resúmen, si la triseccion puede hacerse por medio de la regla i del compas, habrá, a lo mas, dos soluciones del problema (11). Si ahora se demuestra que el número de soluciones ha de ser tres, no quedará duda que el problema no puede ser resuelto con la regla i el compas.

Este último punto se puede demostrar así: cuando se dibuja un ángulo α, no puede dejarse de dibujar al mismo tiempo todos los ángulos comprendidos en la fórmula

$$a + n \times 360^{\circ}$$

siendo n un número entero. Luego, cuando se busca el ángulo $\frac{\alpha}{3}$ se debe obtener al mismo tiempo todos los ángulos comprendidos en la fórmula

$$\frac{\alpha}{3} + n \times 120^{\circ}$$

Entre estos figuran los tres ángulos $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{3} + 120^{\circ}$ i $\frac{\alpha}{3} + 240^{\circ}$ que son distintos unos de otros; los demas no difieren de estos tres sino en un múltiplo de 360°. Así, cuando se busca por un

(11) A este respecto, es decir, en cuanto al número de soluciones de que es susceptible un problema de jeometría. el señor Tafelmacher observa con razon que este número puede ser hasta *ocho*, i que lo principal es que un problema jeométrico que tiene mas de dos soluciones, en el caso jeneral debe tener un número par de soluciones, no obstante que tal número se reduzca, en casos particulares, a otro impar menor. Por ejemplo sea, «determinar sobre una circunferencia un punto que diste de una recta dada L una lonjitud dada δ. Si L corta a la circunferencia, habrá cuatro soluciones en el caso que las dos paralelas a L trazadas a una distancia δ son secantes a la circunferencia, pero el número de soluciones se reduce a *tres* cuando una de las secantes se convierte en tanjente.

procedimiento cualquiera el ángulo $\frac{a}{3}$ no se podrá dejar de encontrar, además de este ángulo, otros dos distintos del primero i distintos entre sí; es decir, que el problema de la triseccion es susceptible de tres soluciones; por consiguiente, segun hemos visto anteriormente, no se podrá resolver por medio de la regla i el compas.»

A pesar de que la demostracion anterior es lo suficientemente sencilla i completa para convencer al mas escéptico, entraremos en mayores detalles a fin de llevar mas el convencimiento a los mas exijentes.

La imposibilidad de una solucion jeométrica del problema en estudio está fundada en consideraciones que pasamos a esponer.

Para resolver un problema dado, es necesario:

1.°) *Efectuar la construccion;*

2.°) *Demostrar que ella es esacta;* i

3.°) *Discutirla*, es decir, indicar los límites entre los cuales los datos deben estar comprendidos para que el problema admita 0, 1, 2, 3, etc., soluciones.

Antes de efectuar la construccion es necesario cerciorarse de si el problema de que se trata admite solucion.

En la jeometría de Euclydes, siempre que un problema admite solucion, ésta debe componerse de dos operaciones fundamentales i únicas: trazar una recta por dos puntos dados, i trazar una circunferencia conocidos que sean el centro i el radio; ya que no se admiten mas que las construcciones en que entra la línea recta i la circunferencia, es decir, aquellas que pueden efectuarse con la ayuda única de la regla (para trazar rectas, no para medir) i del compas.

En la mayoría de los casos la solucion de un problema depende de la fijacion de un punto, i es sabido que un punto queda determinado cuando se conocen dos condiciones a las cuales debe satisfacer. Si se elimina una de esas condiciones, la fijacion del punto es ya indeterminada: habrá una série de puntos que satisfagan a la condicion que se ha conservado i esa série de puntos forman una línea, que se denomina *lugar jeométrico.*

En resúmen, un punto queda fijado por la condicion de encontrarse colocado sobre dos lugares jeométricos a la vez. Un punto jeométrico es pues la interseccion de dos lugares jeométricos.

Supongamos ahora que por cualquiera de los métodos de la Jeometría Analítica se haya puesto en ecuacion el problema, o se haya establecido las ecuaciones de los lugares jeométricos que por sus intersecciones proporcionan la solucion del problema. Habrá que construir cada una de esas ecuaciones, lo que no es otra cosa que reemplazar los valores numéricos espresados en ella, por construcciones jeométricas. I como estas construcciones deben ligar convenientemente las líneas que representan los valores numéricos considerados, deben conducir, en último término, a una línea que representa el valor numérico de la incógnita.

Como la ecuacion de la recta es de primer grado, i la de la circunferencia de segundo grado, no se podrán construir mas que fórmulas racionales de primer grado ó irracionales que encierren radicales de segundo grado o que puedan reducirse a radicales de segundo grado, lo que se demuestra fácilmente (12).

En otros términos, "*la condicion necesaria i suficiente para que un problema pueda resolverse con la regla i el compas es que las cantidades buscadas puedan espresarse por medio de cantidades dadas racionalmente i por raices cuadradas*" (13).

Ahora bien, como luego lo veremos, el problema en estudio conduce a una ecuacion de tercer grado que da para la incógnita tres valores reales, desiguales e inconmensurables.

Es pues, una ecuacion *irreductible*, es decir, que su primer miembro no puede descomponerse en dos factores (polinomios) de coeficientes racionales.

Consiguientemente, el problema de la triseccion no podrá relacionarse con las intersecciones de rectas i circunferencias o de circunferencias entre sí, intersecciones qne, prescindiendo de casos particulares, se producen siempre en número par.

No es ménos evidente que el problema en que nos hemos

---

(12) Véase FOURCY. *Leçons de Géomètrie Analytique*, páj. 131.

(13) J. PETERSEN. *Constructions Géométriques*. Paris, 1892.

ocupado no podrá construirse sino empleando curvas capaces de dar tres puntos de interseccion, es decir que no podrá resolverse con el empleo esclusivo de la recta i de la circunferencia.

Para demostrar ahora que la ecuacion que traduce el problema al lenguaje del análisis es de tercer grado, *irreductible*, supongamos que se conoce cos a i se quiere determinar cos $\frac{a}{3}$.

Si en la fórmula

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

reemplazamos a por $\frac{a}{3}$ tendremos

$$\cos a = 4 \cos^3 \frac{a}{3} - 3 \cos \frac{a}{3}$$

Hagamos:

$$\cos a = b$$

i

$$\cos \frac{a}{3} = x$$

se tendrá:

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

que es una ecuacion *irreductible*.

Veamos cuáles son las raices.

Para tener todos los valores posibles de $x = \cos \frac{a}{3}$, es preciso considerar todos los valores posibles de $b = \cos a$, valores que se dan por la fórmula:

$$b = \cos (2n\pi + a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

designando por n un número entero cualquiera.

De la espresion (2) se deduce

$$x = \cos \frac{2n\pi + a}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

fórmula que da valores distintos solo cuando n tiene una de estas tres formas:

$$3k, \; 3k + 1 \text{ i } 3k + 2$$

Introduzcamos, pues, sucesivamente en la espresion (3) los valores:

$$n=3k,\ n=3k+1 \text{ i } n=3k+2$$

Se tendrá

$$x = \cos\frac{6k\pi+a}{3} = \cos\left[2k\pi+\frac{a}{3}\right] = \cos\frac{a}{3}$$

$$x = \cos\frac{(3k+1)2\pi+a}{3} = \cos\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right] = \cos\left[\frac{2}{3}\pi+\frac{a}{3}\right]$$

$$x = \cos\frac{(3k+2)2\pi+a}{3} = \cos\left[2k\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{a}{3}\right] = \cos\left[\frac{4}{3}\pi+\frac{a}{3}\right]$$

Esto indica que si se resolviese la ecuacion (1) se obtendrian las tres raices reales, desiguales, e inconmensurables:

$$x' = \cos\frac{a}{3}$$

$$x'' = \cos\left[\frac{2}{3}\pi+\frac{a}{3}\right]$$

$$x''' = \cos\left[\frac{4}{3}\pi+\frac{a}{3}\right] = \cos\left[\frac{2}{3}\pi-\frac{a}{3}\right]$$

Así como hemos elejido el *cos* para hacer esta demostracion, podríamos haber elejido otra funcion trigonométrica cualquiera, el *sen.* o la *tg.* por ejemplo, i habríamos llegado siempre a una ecuacion de tercer grado, irreductible.

Creemos haber dejado, una vez mas, claramente demostrada la imposibilidad de resolver jeométricamente el problema de la triseccion.

Una última observacion.

Se ha creido o pretendido creer que el problema de dividir un ángulo en tres partes iguales, podria darse por resuelto siempre que se encontrara un procedimiento, jeneral o particular, i cualquiera que fuesen los medios empleados, que proporcionara el ángulo $\frac{a}{3}$.

En realidad de verdad, esta creencia es errónea, profundamente errónea, ya que el problema fué propuesto como lo hemos dicho anteriormente, en determinadas condiciones, *valiéndose solo de la recta i de la circunferencia.*

Inútiles son, pues, los esfuerzos gastados en construir instrumentos especiales, aplicar cálculos logarítmicos,—lo que ya es el colmo—i combinar curvas particulares.

No se satisfacen, ni con mucho, las condiciones del problema; i despues de todo, éste no tiene, en sí, importancia práctica alguna, ya que un simple tanteo es suficiente para satisfacer las mayores exijencias en los poquísimos casos en que, en las artes industriales, se hace necesario trisecar un ángulo.

En cuanto a las necesidades del dibujo, un trasportador bien manejado salva con ventajas la dificultad.

FRANCISCO MARDONES
Ayudante del Curso de Jeometría Descriptiva.