CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Luego

$$y+\sqrt{y^2-K^2}=C\,e^{\frac{x}{K}}$$

De aquí se deduce

$$\frac{K^2}{y+\sqrt{y^2-K^2}}=y-\sqrt{y^2-K^2}=\frac{K^2}{C}\,e^{-\frac{x}{K}}$$

Finalmente, si se toma $C=K$

$$y=\frac{K}{2}\left(e^{\frac{x}{K}}+e^{\frac{-x}{K}}\right)$$

Es la ecuacion de una *catenaria.* Luego la superficie de revolucion enjendrada por la catenaria es aplicable sobre el helicoide con plano director.

Las únicas superficies que se pueden aplicar sobre un plano son las superficies desarrollables

En efecto, elijamos en el plano las abscisas i las ordenadas como curvas u i v; los valores de ds i ds' relativas a la superficie i al plano, serán

$$ds^2 = A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2$$

$$ds'^2 = du^2 + dv^2$$

Luego, para que la superficie pueda aplicarse sobre el plano es necesario que se tenga, en todos sus puntos,

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = 1$$

O bien, si se reemplazan A, B, C por sus valores (6)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$$

Derivamos estas relaciones, respecto de u i v, tendremos, despues de algunas reducciones evidentes,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

De estas ecuaciones se deduce

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}} \tag{15}$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}}=\frac{\dfrac{d^2 z}{\partial v\partial u}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}} \tag{16}$$

Las relaciones (15) espresan, segun (4), que $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ son funciones de un solo parametro t porque sus deriv das parciales respecto de u i de v son proporcionales; las relaciones (16) espresan que $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ son tambien funciones de un mismo parametro t', ademas la relacion

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

muestra que los parametros t i t' deben ser funcion uno de otro; luego, en resúmen, las seis derivadas $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ son funciones de un mismo parametro t.

Ahora, si λ, μ, ν son los cosenos directores de la normal en un punto de la superficie, se tiene

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial v} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Luego los tres cosenos λ, μ, ν son tambien funciones de un solo parametro i hemos visto, en el capítulo II, que esta propiedad caracteriza las superficies regladas desarrollables. Estas últimas son por consiguiente las únicas superficies que pueden aplicarse sobre un plan, sin ruptura ni doblez.

La demostracion anterior es debida a *Bonnet*.

TEOREMA

Cuando dos superficies son aplicables una sobre la otra, los productos de los radios de curvatura principales, en los puntos correspondientes de las dos superficies, son iguales.

Sea, en efecto, O un punto de una superficie; referimos una porcion infinitamente pequeña de ella a un sistema de ejes de coordenadas tales que O sea el oríjen, XOY el plano tanjente, en O, a la superficie i OX, OY las direcciones principales en el mismo punto.

Consideremos, en cada seccion normal de la superficie i a partir del punto O, un arco de lonjitud infinitamente pequeño s; limitaremos así, sobre la superficie, un área ω.

Trataremos de avaluar esta área, considerando a s como infinitamente pequeño principal i despreciando los infinitamente pequeños de tercer órden.

Sea $d\omega$ un elemento de esta área i λ, μ, ν los cosenos directores de la normal a este elemento, $d\omega_1$ la proyeccion de $d\omega$ sobre el plano XOY, se tendrá

$$d\omega = \frac{d\omega_1}{\nu}$$

Para calcular ν se puede sustituir a la superficie su paraboloide osculador; sean R_1, R_2 los radios principales de curvatura en O, la ecuacion del paraboloide osculador es

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$$

Luego

$$\frac{\lambda}{\frac{x}{R_1}} = \frac{\mu}{\frac{y}{R_2}} = \frac{\nu}{-1}$$

De aquí se deduce

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2}}$$

i, por consiguiente, al órden de aproximacion adoptado

$$d\omega = d\omega_1 \left(1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2}\right)$$

Se puede escribir ahora

$$d\omega_1 = \rho\, d\rho\, d\theta$$

i se tendrá

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \rho\, d\rho \left(1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2}\right)$$

O bien

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \rho\, d\rho + \rho^3 d\rho \left(\frac{\cos^2\theta}{2R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2R_2^2}\right)$$

i por consiguiente

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\theta \quad \left\{ \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\left(\frac{\cos^2\theta}{2R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2R_2^2}\right)\right\}$$

En estas fórmulas, r es la proyeccion sobre XOY del arco s situado en el plano normal cuya orientacion es θ. Sea R el radio de curvatura de la seccion correspondiente, se tendrá

$$r = s\left(1 - \frac{s^2}{6R^2}\right)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_2}$$

Luego, al mismo órden de aproximacion,

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\theta \quad \left\{ \frac{s^2}{2}\left(1 - \frac{s^2}{3R^2}\right) + \frac{s^4}{8}\left(\frac{\cos^2\theta}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_2^2}\right)\right\}$$

O todavía

$$\omega = \pi s^2 - \frac{s^4}{24}\int_0^{2\pi} d\theta \left\{ 4\left(\frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R^2}\right)^2 - 3\left(\frac{\cos^2\theta}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_2^2}\right)\right\}$$

La integracion no presenta dificultad i se obtiene finalmente

$$\omega = \pi s^2 \left(1 - \frac{s^2}{12 R_1 R_2} \right)$$

Para que otra superficie pueda aplicarse, sin ruptura ni doblez sobre la primera, es necesario que, en los puntos correspondientes de las dos superficies, i con el mismo valor de s, se obtenga el mismo valor de ω, luego es necesario que el producto $R_1 R_2$ tenga el mismo valor en los referidos puntos.

En el plano, el producto $R_1 R_2$ es infinito para todos los puntos, luego las únicas superficies que se pueden aplicar exactamente sobre el plano son aquellas que tienen en todos sus puntos un radio principal de curvatura infinito. Habrá por consiguiente, sobre estas superficies, un sistema de líneas de curvatura en todos los puntos de los cuales el radio de curvatura principal de la superficie es infinito, ahora los normales a la superficie en los puntos de esta línea de curvatura deben formar una superficie desarrollable, luego esta superficie desarrollable debe reducirse a un plano; las líneas de curvatura del sistema considerado son por consiguiente rectilíneas; i la superficie aplicable sobre el plano es reglada; ademas la normal en todos los puntos de una misma jeneratriz conserva una direccion constante, luego es una superficie reglada desarrollable.

SUPERFICIE DE ÁREA MÍNIMA QUE PASA POR UNA CURVA DADA CUALQUIERA

Resolveremos, en primer lugar, el siguiente problema: Dos puntos fijos A, B están situados en los planos de coordenadas XOZ, YOZ a una misma distancia a del eje OZ; se consideran entre los paraboloides que pasan por A i B i tienen su vértice sobre OZ, los que tienen sus planos principales confundidos con XOZ, YOZ. Un cilindro de revolucion, paralelo a OZ, tiene por seccion recta una circunferencia de radio a. Se pide cuál debe ser la forma del paraboloide para que el área limitada sobre él por el cilindro sea un mínimo.

La ecuacion de uno cualquiera de los paraboloides tiene la forma

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + C$$

Sean z', z'' las ordenadas constantes de A i B, se tendrá

$$z' = \frac{a^2}{2R_1} + C$$

$$z'' = \frac{a^2}{2R_2} + C$$

Luego, cualquiera que sea C, la diferencia $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ será constante.

Ahora, sea $d\omega$ un elemento de área del paraboloide i λ, μ, ν los cosenos directores de la normal en este punto, se tiene

$$\frac{\lambda}{\frac{x}{R_1}} = \frac{\mu}{\frac{y}{R_2}} = \frac{\nu}{-1}$$

Luego

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2}}}$$

Sea tambien $d\omega_0$ la proyeccion de $d\omega$ en el plano XOY,

$$d\omega = \frac{d\omega_0}{\nu} = d\omega_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2}}$$

Supondremos que a es una cantidad infinitamente pequeña i despreciaremos a^4, entónces

$$d\omega = d\omega_0 \left(1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2} \right)$$

Por consiguiente

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2R_1^2} \Sigma x^2 d\omega_0 + \frac{1}{2R_2^2} \Sigma y^2 d\omega_0$$

Las dos sumas que figuran en el segundo miembro son evidentemente iguales i funciones de a; sea $K\omega_0$ su valor comun, podremos escribir

$$\omega = \omega_0 + \frac{K\omega_0}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right)$$

El área ω será un mínimo cuando el paréntesis tendrá un valor mínimo; pero la diferencia $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ es constante, luego ω será mínimo cuando se tendrá

(17) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

Este resultado puede aplicarse directamente a la superficie mínima que pasa por una curva dada cualquiera; en efecto, si se considera, al rededor de un punto O de la superficie, una curva cerrada de dimensiones infitamente pequeñas, el área limitado por esta curva debe ser un mínimo; se pueden ahora elejir en las secciones principales del punto O dos puntos A i B infinitamente próximos de O i reemplazar la porcion infinitamente pequeña de superficie por la del paraboloide osculador en O. Entónces si A i B quedan fijos, la posicion del punto O sobre la normal debe ser tal que la condicion (17) sea satisfecha.

Luego en todos los puntos de una superficie de área mínima se debe tener

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.$$

CAPÍTULO VI

DE LA CURVATURA JEODÉSICA

Se sabe que las líneas jeodésicas de una superficie tienen una gran analojía con las líneas rectas del plano; por analojía tambien se considera una curva, trazada sobre una superficie, como el límite de un polígono formado con líneas jeodésicas infinitamente pequeñas e iguales.

Se llama entónces *curvatura jeodésica en un punto*, el límite de la razon entre el ángulo de dos elementos jeodésicos consecutivos i la lonjitud comun de ellos.

La curvatura así definida es igual a la curvatura en el mismo punto, de la proyeccion de la curva sobre el plano tanjente a la superficie, en el punto considerado.

Sean, en efecto, S la superficie considerada; AM, MB dos elementos jeodésicos i consecutivos de una curva C; ϵ el ángulo de estos elementos i ds su lonjitud comun. Proyectemos la curva C sobre el plano tanjente, en M, a la superficie i sean: C' la curva proyectada; A', B' las proyecciones de A i B. Se sabe que el plano osculador en un punto cualquiera de una línea jeodésica es normal a la superficie en este punto; luego, si se desprecia ds^3, los arcos AM i MB pueden ser considerados como contenidos en los planos, normales a la superficie i tanjentes en M a los dos arcos considerados; de aquí resulta que las proyecciones de los elementos considerados en el plano tanjente a la superficie son dos elementos rectos i consecutivos de la curva proyectada C' i que el ángulo de estos últimos elementos es igual a ϵ; por otra parte, i al mismo órden de aproximacion, la lonjitud comun de los elementos es ds, luego el límite $\frac{\epsilon}{ds}$ que, por definicion, es la curvatura jeodésica, en M, de la curva C, representa tambien la curvatura, en el mismo punto, de la curva proyectada C'.

Espresion analítica de la curvatura jeodésica

Sean, como mas arriba, C una curva de la superficie S, M uno de sus puntos i C' la proyeccion de C sobre el plano tanjente en M, a la superficie; segun el teorema anterior, la curvatura jeodésica de C, en el punto M, es igual a la curvatura de C', en el mismo punto. Buscaremos, por consiguiente, cuál es la ecuacion de la curva proyectada C' en la proximidad del punto M.

Sean x, y, z; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ las coordenadas de los dos puntos infinitamente próximos M, B, de la curva C, consideremos, en el plano tanjente en M, dos ejes MX, MY: el primero tanjente a la curva C, el segundo normal; sean ξ, η, ζ los cosenos directores de MX i ξ', η', ζ' los de MY; $X\,Y$ las coordenadas de la proyeccion B' de B en el plano tanjente, se tiene

$$X=\xi\,\Delta\,x+\eta\,\Delta\,y+\zeta\,\Delta\,z$$

$$Y=\xi'\Delta\,x+\eta'\Delta\,y+\zeta'\Delta\,z$$

Ahora

$$\Delta x = \frac{dx}{ds}\, ds + \frac{1}{2}\, \frac{d^2x}{ds^2}\, ds^2 + \ldots.$$

$$\Delta y = \frac{dy}{ds}\, ds + \frac{1}{2}\, \frac{d^2y}{ds^2}\, ds^2 + \ldots.$$

$$\Delta z = \frac{dz}{ds}\, ds + \frac{1}{2}\, \frac{d^2z}{ds^2}\, ds^2 + \ldots.$$

Representemos por una espresion entre [ ] la suma de tres términos análogos i relativos a los tres ejes de coordenadas, tendremos

$$X = \left[\xi \frac{dx}{ds}\right] ds + \frac{1}{2}\left[\xi \frac{d^2x}{ds^2}\right] ds^2 + \ldots.$$

$$Y = \left[\xi' \frac{dx}{ds}\right] ds + \frac{1}{2}\left[\xi' \frac{d^2x}{ds^2}\right] ds^2 + \ldots.$$

Pero las primeras derivadas de x, y, z respecto de s son respectivamente iguales a ξ, η, ζ i las segundas derivadas a los cosenos directores de la normal principal a la curva C, luego se tiene

$$\left[\xi \frac{dx}{ds}\right] = 1, \quad \left[\xi \frac{d^2x}{ds^2}\right] = 0, \quad \left[\xi' \frac{dx}{ds}\right] = 0$$

En resúmen, si se desprecia ds^3, se puede escribir

$$X = ds$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[\xi' \frac{d^2x}{ds^2}\right] ds^2$$

Sea ρ el radio de curvatura de la curva proyectada C' en el punto M, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2Y}{X^2}$$

El primer miembro es la curvatura de C' o la curvatura jeodésica de C, luego, si se reemplazan X, Y por sus valores, se obtiene la siguiente espresion de la curvatura jeodésica:

$$\frac{1}{\rho} = \left[\xi' \frac{d^2x}{ds^2}\right] \tag{1}$$

Sean λ', μ', ν', los cosenos directores de la normal principal a la curva C i r su radio de curvatura, se tendrá

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda'}{r}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\mu'}{r}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\nu'}{r}$$

Luego

$$\frac{1}{\rho} = \frac{[\xi' \lambda']}{r}$$

Sea i el ángulo del plano osculador a la curva C con el plano tanjente a la superficie, se tendrá tambien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos i}{r}$$

Esta fórmula se establece directamente si se observa que la curva C puede reemplazarse por la interseccion C_1 de la superficie por el plano osculador a la curva C i la curva C' por la proyeccion de C_1 sobre el plano tanjente.

Espresion de la curvatura jeodésica en coordenadas curvilíneas

Supongamos que los puntos de la superficie S esten definidos por las ecuaciones

$$x = f_1(u, u')$$

$$y = f_2(u, u')$$

$$z = f_3(u, u')$$

i sean respectivamente α, β, γ i α' β' γ' los cosenos directores de los tanjentes a las curvas u i u', en un punto M; podremos escribir

A. OBRECHT

(*Continuará*)