SOBRE LOS POLÍGONOS REGULARES, CONVEXOS I ESTRELLADOS

INTRODUCCION

Jeneralizar los métodos que permiten, ya sea calcular los lados de los polígonos regulares en funcion del radio del círculo circunscrito, o ya sea establecer las relaciones mas importantes que ligan los lados entre sí o con el radio, ha sido nuestro propósito al escribir el presente trabajo.

Cuando se trata de la determinacion de los lados de los polígonos regulares, hai que considerar como fundamentales, al exágono, al cuadrado i al decágono. Por otra parte, los lados de estos polígonos se calculan en funcion del radio por métodos directos mui sencillos.

Pero, en jeneral, el cálculo puede hacerse por medio del teorema de Ptolomeo, referente al cuadrilátero inscrito.

Como no hemos encontrado la aplicacion del teorema anterior estendida a todos los casos, hemos dado las demostraciones que faltaban; entre estas últimas, creemos que son dignas de mencion las que se refieren al lado del pentágono.

Pero, siendo mui sencillos los métodos especiales para la determinacion del lado del cuadrado, del exágono, del triángulo equilátero i del decágono, conviene preferirlos en los cursos de humanidades, a pesar de las ventajas que presentan en matemáticas los métodos jenerales.

El lector encontrará tambien en nuestro trabajo la jeneralización de otro método sencillo, que hemos llamado del "triángulo determinante," porque en cada caso se construye un triángulo semejante al que resulta de unir los estremos de un lado del polígono de que se trata, con el centro.

Pero, desgraciadamente, este método no es aplicable al jénero de los pentadecágonos.

Ademas, damos a continuacion de los métodos jenerales, algunos especiales, en su totalidad conocidos.

Habiendo encontrado inexactitud en algunos autores de Jeometría, en la consideracion de las áreas de ciertos polígonos regulares estrellados, hemos dado una fórmula exacta para todos los casos que se presentan.

En la obra titulada *Ejercicios de Jeometría*, por F. J. (tercera edicion, año 1896, pájina 740 i número 1745), se da para el área del octógono estrellado la fórmula

$$\frac{4r^2(3-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \text{ o } 2r^2(8-5\sqrt{2}),$$

siendo el verdadero valor $2r^2(3\sqrt{2}-4)$.

La consideracion del área hecha por Portuondo en sus notas al Tratado de Jeometría Elemental de Rouché i Comberousse tampoco es jeneral, pues no es aplicable sino a los polígonos estrellados de segunda especie.

SIGNOS I ABREVIACIONES EMPLEADAS EN LA OBRA

1) r, radio del círculo circunscrito.

2) l_m, lado del polígono regular de m lados.

3) ${}^{(n)}l_m$, lado del polígono que resulta de dividir la circunferencia en m partes, i de juntar de n en n arcos.

4) ${}^{(n)}\rho_m$, radio del círculo inscrito en el polígono de m lados,

i que resulta de unir de n en n los puntos de la circunferencia circunscrita.

5) L_m, lado del polígono circunscrito de m lados.

6) ${}^{(n)}s_m$, área del polígono de m lados, que se ha formado uniendo de n en n los puntos de la circunferencia circunscrita.

7) a, lado de un polígono regular cualquiera.

8) Resl., resolucion.

9) $\sphericalangle$, ángulo.

10) Δ, triángulo.

11) $\backsim$, semejante.

CAPÍTULO I

1) DEFINICION.—*Una línea quebrada i contínua se llama regular cuando satisface a la vez las siguientes condiciones:*

1.ª *Cuando los lados son iguales;* 2.ª *cuando los ángulos son iguales;* 3.ª *cuando de tres lados consecutivos, uno de ellos, el lado medio, deja a un mismo lado a los otros dos.*

Siendo la tercera condicion propia de toda línea convexa, ésta será regular con solo cumplir con las dos primeras (fig. 1).

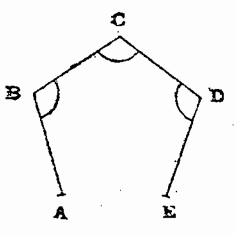

Fig. 1

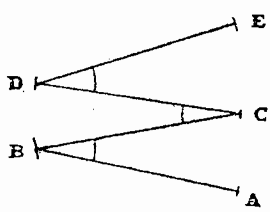

Fig. 2

Pero si la línea no es convexa i no cumple con el tercer requisito, como se ve en la (fig. 2), no será regular, apesar de cumplir con los dos primeros.

La línea quebrada de la (fig. 3) es regular, porque cumple con las tres condiciones requeridas en la definicion.

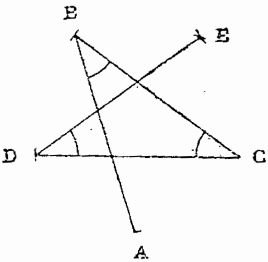

Fig. 3

2) DEFINICION.—*Polígono regular es aquel cuyo perímetro está formado por una línea angulosa, regular i cerrada.*

Los polígonos regulares se dividen en convexos i estrellados.

Convexos son los polígonos que tienen por perímetro una línea quebrada convexa (fig. 4).

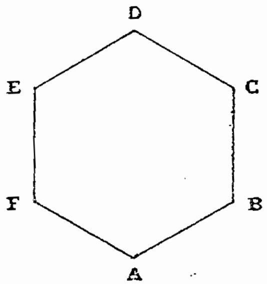

Fig. 4

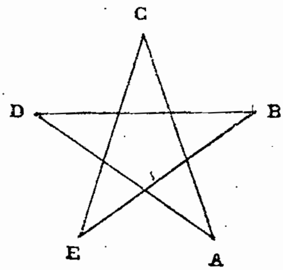

Fig. 5

Estrellados son los polígonos que tienen sus ángulos alternativamente salientes i entrantes, i cuyos lados pertenecen a una línea angulosa contínua i cerrada (fig. 5).

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS

3) TEOREMA.—*Si una circunferencia se divide en m partes iguales, i los puntos de division se juntan de n en n, siempre que se vuelva al punto de partida, el polígono que resulta será regular.*

Dem: Los lados son iguales entre sí, i tambien los ángulos, por comprender respectivamente el mismo número de arcos iguales. Ademas, uno cualquiera de los trazos del perímetro deja siempre a un mismo lado al que le antecede i le sigue.

4) NATURALEZA DEL POLÍGONO INSCRITO.

a) En una circunferencia dividida en m partes iguales, si se juntan los puntos de division de n en n, es decir, de modo que cada lado subtienda n arcos, se verificará:

1.° Que cuando m sea divisible por n, la línea quebrada cerrará a la primera vuelta, i el polígono que resulta será convexo.

2.° Que cuando m no sea divisible por n, la línea quebrada no cerrará a la primera vuelta, sino a la segunda, o tercera, etc.; i el polígono formado en este caso será estrellado.

En el primer caso el número de lados del polígono es igual a $\frac{m}{n}$; si $n = 1$, es evidente que el polígono tiene m lados.

En el segundo caso, es decir, cuando m no es divisible por n, si representamos por p el número de vueltas que es necesario dar para que la línea quebrada cierre por primera vez, el número de lados del polígono estrellado será igual a la fraccion $\frac{p.\ m}{n}$. Puesto que, estando representada una vuelta al rededor de la circunferencia por m partes, el número de arcos despues de p vueltas será igual a p. m., i como cada cuerda subtiende n arcos, habrá tantas cuerdas como n esté contenido en p. m.

Observacion: Representando p el número de vueltas que hai que dar para volver por primera vez al punto de partida, se ve fácilmente que p. m. es el primer múltiplo de n.

5) Ya sabemos que el número de lados de un polígono con-

vexo es igual a $\frac{m}{n}$, i el de un estrellado a $\frac{p.\ m.}{n}$. Pero una fraccion no cambia de valor cuando se simplifica; por lo tanto, cuando m i n tengan algun factor comun, podremos suprimirlo.

6) TEOREMA.—*Si m i n son números primos, el número de lados de un polígono regular inscrito, de cualquiera naturaleza que sea, será igual al numerador de la fraccion* $\frac{m}{n}$; *i el número de vueltas que es necesario dar para que el polígono cierre, es igual al denominador.*

$$\text{Dem: Sea} \quad \frac{m}{n} = c + \frac{r}{n}$$

$$\text{o bien} \quad m = cn + r$$

si r i n tuvieran un divisor comun, dividiria a m, lo que es imposible; luego, siendo m i n números primos, tambien lo seran r i n.

Multiplicando, ahora, los dos miembros de la primera igualdad por p., número de vueltas que es necesario dar para que la línea quebrada cierre por primera vez, tendremos:

$$\frac{pm}{n} = c\,p + \frac{p.r}{n}$$

Habiendo cerrado la línea quebrada, el número de lados del poligono $\frac{pm}{n}$ será igual a un número entero, segun (4); luego $c\,p + \frac{pr}{n} = \text{entero}$ i por lo tanto $\frac{pr}{n} = \text{entero}$.

Pero como r es primo con n, debe ser p divisible por n.

Segun lo dicho, el polígono cierra por primera vez cuando $p = n$; lo que prueba la segunda parte del teorema.

Reemplazando este valor en $\frac{pm}{n} = \text{número de lados}$, tendremos $\frac{n.m}{n} = m$, número de lados; lo que demuestra la primera parte.

7) TEOREMA.—*En una circunferencia dividida en m partes iguales, se podran inscribir tantos polígonos regulares de m lados como números primos haya con m i menores que* $\frac{m}{2}$

Dem. La primera parte no es mas que una consecuencia del teorema anterior.

Para la demostracion de la segunda parte distinguiremos dos casos: a) m par; b) m impar.

a) Observemos que unir los puntos de $\frac{m}{2}$ en $\frac{m}{2}$ equivale a dibujar un diámetro, i en tal caso el polígono se reduce a una línea.

Por otra parte:

unir de $\frac{m}{2} + 1$ en $\frac{m}{2} + 1$ equivale a

" " $\frac{m}{2} - 1$ en $\frac{m}{2} - 1$, i que

" " $\frac{m}{2} + 2$ en $\frac{m}{2} + 2$ equivale a

" " $\frac{m}{2} - 2$ en $\frac{m}{2} - 2$ i en jeneral

" " $\frac{m}{2} + n$ en $\frac{m}{2} + n$ equivale a

" " $\frac{m}{2} - n$ en $\frac{m}{2} - n$

Pero la escala:

$$\frac{m}{2} - n,\ \frac{m}{2} - (n-1)\ \ldots\ \frac{m}{2} - 2,\ \frac{m}{2} - 1;$$

equivale a esta otra

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ \frac{m}{2} - 1;$$

hai que suprimir en ella los números qne no son primos con m (segun primera parte) para tener los polígonos de m lados.

b) Es evidente que unir de m en m los puntos de division, equivale a no moverse del punto de partida.

LUIS A. SILVA.

(Continuará)