Sobre los Polígonos Regulares, Convexos i Estrellados

(Continuacion)

CUARTO MÉTODO (l_{20}, ${}^{(3)}l_{20}$, ${}^{(7)}l_{20}$, i ${}^{(9)}l_{20}$), aprovechando la propiedad del cateto (fig. 40).

a) $l_{20} = \sqrt{2r(r\text{-}OK)}$

pero OK es la apotema del lado (l_{10}) del decágono convexo, i segun observacion página 29.

$$OK = \frac{1}{2}\,{}^{(2)}l_5 = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

luego

$$l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

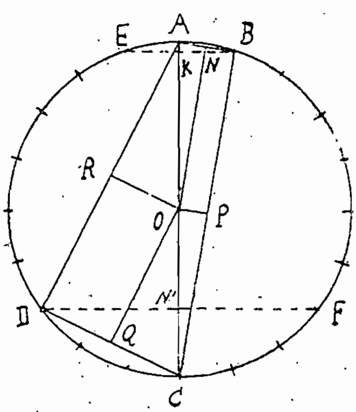

Fig. 40

b) Análogamente

$$^{(9)}l_{20} = \sqrt{2r\,(r + OK)}$$

luego

$$^{(9)}l_{20} = r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

c)

$$^{(3)}l_{20} = \sqrt{2r\,(r - ON')}$$

pero ON′ es la apotema del decágono estrellado, i sabemos que

$$^{(3)}\rho_{10} = ON' = \frac{1}{2}\,l_5 = \frac{r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

luego

$$^{(3)}l_{20} = r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

d) Análogamente

$$^{(7)}l_{20} = \sqrt{2r\,(r + ON)}$$

luego

$$^{(7)}l_{20} = r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Obs.—Nótese que (fig. 40)

$$OP = {}^{(9)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,.\,l_{20}, \quad ON = \rho_{20} = \frac{1}{2}\,.\,{}^{(9)}l_{20},$$

$$OR = {}^{(7)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,.\,{}^{(8)}l_{20} \text{ i } OQ = {}^{(3)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,.\,{}^{(7)}l_{20}$$

20) *Inscribir los pentadecágonos de 1.ª, 2.ª, 4.ª i 7.ª especie.*

Resl.: Como $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, bastará aplicar el radio sobre la circunferencia, i desde uno de sus estremos, i en el mismo sentido, el lado del decágono regular convexo; la cuerda que subtiende el arco diferencia será el lado del pentadecágono convexo i cabrá 15 veces en la circunferencia.

La unión de los puntos de dos en dos, cuatro en cuatro i siete en siete, dará los polígonos estrellados.

Cálculo de los lados en funcion del radio

PRIMER MÉTODO (Teorema de Ptolomeo).

a) $BC = l_{15}$ por ser $AC = r$ i $AB = l_{10}$; ademas $DC = l_3$, $BD = {}^{(2)}l_5$. Todas estas cuerdas son conocidas, ménos l_{15}; pero el cuadrilátero ABCD nos da

$$l_{15} \cdot 2r = r \cdot {}^{(2)}l_5 - l_{10} \cdot l_3$$

i reemplazando valores, hallamos

$$l_{15} = \frac{r}{4} \left\{ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{3} \right\}$$

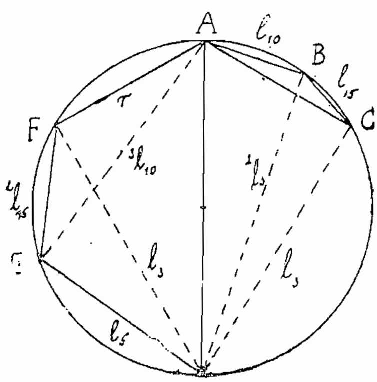

Fig. 41

b) Por ser $\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ (fig. 41), tomando $AE = {}^{(3)}l_{10}$ i $AF = l_6$, será $EF = {}^{(2)}l_{15}$, $DF = l_3$ i $DE = l_5$.

El cuadrilátero ADEF nos da

$${}^{(2)}l_{15} \cdot 2r = {}^{(3)}l_{10} \cdot l_3 - r \cdot l_5$$

i reemplazando valores, hallamos

$${}^{(2)}l_{15} = \frac{r}{4} \left\{ (1 + \sqrt{5}) \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right\}$$

c) Como $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$, tomando AB=r i AD=$l_{10}$, será BD= ${}^{(4)}l_{15}$, ademas BC=l_3 i CD= ${}^{(2)}l_5$ (fig. 42).

Por otra parte, el cuadrilátero ABCD nos da

$$ {}^{(4)}l_{15}\,.\,2r = r\,.\,{}^{(2)}l_5 + l_{10}\,.\,l_3, $$

i reemplazando valores, queda

$$ {}^{(4)}l_{15} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(-1+\sqrt{5})\sqrt{3}\right\} $$

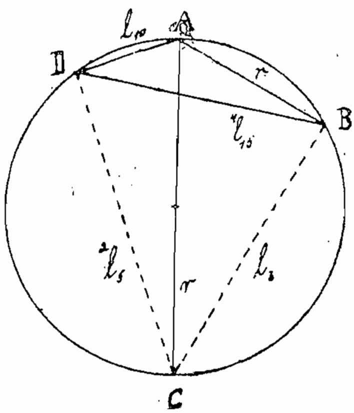

Fig. 42

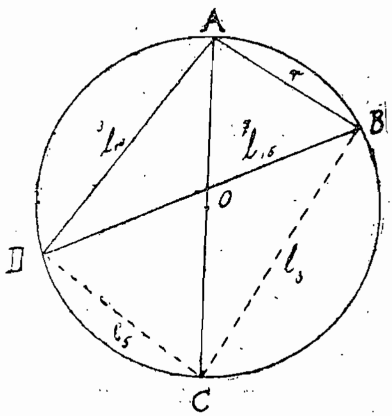

Fig. 43

d) Como $\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}$, tomando AD= ${}^{(3)}l_{10}$ i AB=r, será (fig. 43) BD= ${}^{(7)}l_{15}$, ademas BC=l_3 i CD=l_5.

El cuadrilátero ABCD nos da

$$ {}^{(7)}l_{15}\,.\,2r = {}^{(3)}l_{10}\,.\,l_3 + r\,l_5 $$

i reemplazando valores, hallamos

$$ {}^{(7)}l_{15} = \frac{r}{4}\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\} $$

OBS. Nótese la relacion que hai entre la determinacion de l_{15} i ${}^{(4)}l_{15}$, como asimismo entre ${}^{(2)}l_{15}$ i ${}^{(7)}l_{15}$.

SEGUNDO MÉTODO.—*a*) Cálculo simultáneo de l_{15} i ${}^{(4)}l_{15}$.

Si $AC=r$ i $AB=l_{10}$, será $BC=l_{15}$ (fig. 44), puesto que $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$.

Si, ademas, $CD=l_{10}$, será $AD={}^{(4)}l_{15}$, puesto que $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$.

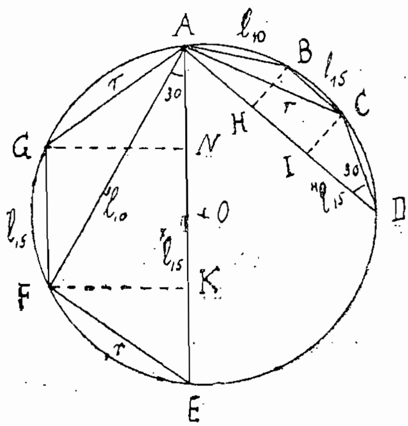

Fig. 44

Bajemos ahora las perpendiculares BH i CI a la recta AD; tendremos

$$l_{15}=AI-DI$$

i

$${}^{(4)}l_{15}=AI+DI$$

El ángulo $CDI=30^\circ$, luego

$$CI=\frac{1}{2}\,l_{10}$$

i por lo tanto

$$DI=\frac{1}{2}\,l_{10}\,.\,\sqrt{3}=\frac{r}{4}\,(-1+\sqrt{5})\,.\,\sqrt{3}$$

Por otra parte

$$AI=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}\,l_{10}^2}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Luego $AI-DI$

$$\text{o } l_{15}=\frac{r}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(-1+\sqrt{5})\sqrt{3}\right\}$$

i AI+DI

$$\text{o}\ {}^{(4)}l_{15}=\frac{r}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(-1+\sqrt{5})\sqrt{3}\right\}$$

b) Cálculo de ${}^{(2)}l_{15}$ *i* ${}^{(7)}l_{15}$.

Si AG=r i AF= ${}^{(3)}l_{10}$, será GF= ${}^{(2)}l_{15}$, puesto que $\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$ (fig. 44). Si, ademas, FE=r, será AE= ${}^{(7)}l_{15}$, puesto que $\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}$.

Bajemos ahora las perpendiculares GN i FK a la cuerda AE, tendremos

$${}^{(2)}l_{15}=AK-EK \quad \text{i} \quad {}^{(4)}l_{15}=AK+EK$$

El ángulo FAK=30°, luego

$$FK=\frac{1}{2}\cdot{}^{(3)}l_{10}$$

i por lo tanto

$$AK=\frac{1}{2}\,{}^{(3)}l_{10}\cdot\sqrt{3}=\frac{r}{4}(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}$$

Por otra parte

$$EK=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}\,{}^{(3)}l_{10}^{(2)}}=\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Luego AK — EK

$$\text{o}\ {}^{(2)}l_{15}=\frac{r}{4}\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

i AK + EK

$$\text{o}\ {}^{(7)}l_{15} = \frac{r}{4}\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{3} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

---

21) *Inscribir las polígonos de 30 lados de 1.ª, 7.ª, 11.ª i 13.ª especie.*

Resl.: Dividimos la circunferencia en 15 partes (número 20) i bisecamos los arcos. Uniendo los puntos de 1 en 1 resulta el polígono convexo de 30 lados; uniéndolos de 7 en 7, 11 en 11 i 13 en 13 los estrellados.

El lector encontrará métodos mas directos en el cálculo de los lados.

Cálculo de los lados en funcion del radio

PRIMER MÉTODO (Teorema de Ptolomeo).

a) Por ser $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$, tomando $AC=l_5$ i $AB=r$, tendremos $BC=l_{30}$ (fig. 45); ademas

$$BD = l_3$$

i

$$CD = {}^{(3)}l_{10}$$

El cuadrilátero ABCD nos da

$$l_{30} \cdot 2r = l_5 \cdot l_3 - r \cdot {}^{(3)}l_{10}$$

i reemplazando valores, hallamos por último

$$l_{30} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\right\}$$

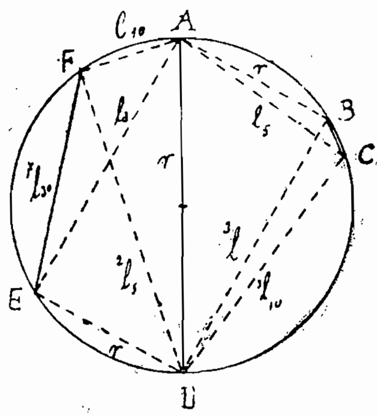

Fig. 45

b) Análogo al anterior. Por ser $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$, será

$$AC = {}^{(11)}l_{30} \text{ etc.} \qquad \text{(fig. 46)}$$

$${}^{(11)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{30-6\sqrt{5}} + (1+\sqrt{5}) \right\}$$

En este caso tenemos la suma de los dos términos del segundo miembro; en el anterior teníamos la diferencia.

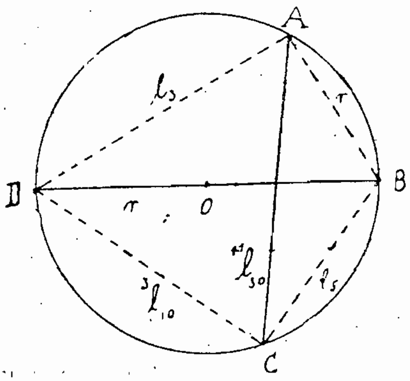

Fig. 46

c) Por ser $\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{7}{30}$, tomando

$$AE = l_3$$

i

$$AF = l_{10} \qquad \text{(fig. 45)}$$

será

$$FE = {}^{(7)}l_{30};$$

ademas

$$DF = r$$

i

$$AD = {}^{(2)}l_5$$

El cuadrilátero ADEF nos da

$${}^{(7)}l_{30} \,.\, 2r = {}^{(2)}l_5 \,.\, l_3 - r l_{10}$$

de donde, reemplazando valores

$${}^{(7)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{30+6\sqrt{5}} - (-1+\sqrt{5}) \right\}$$

d) Análogo al anterior. Como $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=\frac{13}{30}$, será

$$BD = {}^{(13)}l_{30} \text{ etc.}$$

$${}^{(13)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{30+6\sqrt{5}} + (-1+\sqrt{5}) \right\}$$

SEGUNDO MÉTODO.—Por ser los lados de los polígonos del jénero 30, las cuerdas suplementarias de los lados de los polígonos del jénero 15, i como ya conocemos estos últimos lados, podemos determinar los primeros por medio de las propiedades del triángulo rectángulo (fig. 48).

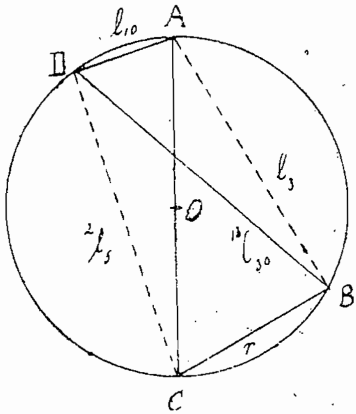

Fig. 47

Dejamos al lector el desarrollo de los cálculos.

OBS.—Si suponemos la circunferencia de centro O dividida en 30 partes iguales (fig. 48), tendremos:

$$AB = l_{30}, \quad BD = {}^{(7)}l_{15};$$

$$AC = {}^{(7)}l_{30}, \quad CD = {}^{(4)}l_{15};$$

$$AF = {}^{(11)}l_{30}, \quad FD = {}^{(2)}l_{15};$$

$$AE = {}^{(13)}l_{30}, \quad ED = l_{15}$$

Dibujando las perpendiculares (apotemas) á las cuerdas, se ve que

$$OK \text{ o } \rho_{30} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(7)}l_{15}, \quad OI \text{ o } {}^{(7)}\rho_{15} = \frac{1}{2} \cdot l_{30};$$

$$OG \text{ o } {}^{(7)}\rho_{30} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(4)}l_{15}, \quad OH \text{ o } {}^{(4)}\rho_{15} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(7)}l_{30};$$

$$OQ \text{ o } {}^{(11)}\rho_{30} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(2)}l_{15}, \quad OP \text{ o } {}^{(2)}\rho_{15} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(11)}l_{30};$$

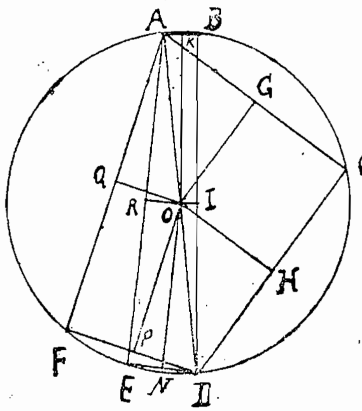

Fig. 48

$$OR \; o^{(13)}\rho_{30} = \frac{1}{2} \cdot l_{15}$$

i

$$ON \; o^{(15)}\rho_{15} = \frac{1}{2} \cdot {}^{(13)}l_{30}$$

---

22) *Inscribir los polígonos del jénero 60 de 1.ª, 7.ª, 11.ª, 13.ª, 17.ª, 19.ª, 23.ª, i 29.ª especie*

Resl.: Dividimos la circunferencia en 30 partes (número 21) i bisecamos los arcos. La union de los puntos, segun sea la especie, nos da todos los polígonos del jénero 60.

Obs.—Los polígonos de 60 lados se pueden inscribir de un modo mas directo, como lo veremos en seguida.

Cálculo de los lados

Primer método (teorema de Ptolomeo).

El tratamiento de esta cuestion es perfectamente análogo al seguido en los del jénero 30. Por cuyo motivo vamos a indicar solo un método especial para construir los lados i a dar la fórmula correspondiente.

a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$ i

$$l_{60} = \frac{r}{4}\left\{(-1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

b) $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{11}{60}$ i

$${}^{(11)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{(-1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

c) $\frac{3}{10} - \frac{1}{12} = \frac{13}{60}$ i

$$^{(13)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

d) $\frac{3}{10} + \frac{1}{12} = \frac{23}{60}$ i

$$^{(23)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

e) $\frac{1}{5} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60}$ i

$$^{(7)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{3}} - (1+\sqrt{5})\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

f) $\frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{17}{60}$ i

$$^{(17)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{3}} + (1+\sqrt{5})\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

g) $\frac{2}{5} - \frac{1}{12} = \frac{19}{60}$ i

$$^{(19)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{3}} - (-1+\sqrt{5})\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

h) $\frac{2}{5} + \frac{1}{12} = \frac{29}{60}$ i

$$^{(29)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{3}} + (-1+\sqrt{5})\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

SECUNDO MÉTODO.—Los valores de l_{60}, $^{(11)}l_{60}$ i $^{(13)}l_{60}$ se pueden determinar por el teorema que dice que «un cateto es media proporcional entre la hipotenusa entera i su proyeccion».

a)

$$l_{60} = \sqrt{2\,r\,(r - \rho_{30})}$$

b)

$$ {}^{(7)}l_{60} = \sqrt{2r\,(r - {}^{(7)}\rho_{30})} $$

c)

$$ {}^{(11)}l_{60} = \sqrt{2r\,(r - {}^{(11)}\rho_{30})} $$

d)

$$ {}^{(13)}l_{60} = \sqrt{2r\,(r - {}^{(13)}l_{30})} $$

Los lados ${}^{(29)}l_{60}$, ${}^{(23)}l_{60}$, ${}^{(19)}l_{60}$ i ${}^{(17)}l_{60}$ son respectivamente las cuerdas suplementarias de l_{60}, ${}^{(7)}l_{60}$, ${}^{(11)}l_{60}$ i ${}^{(13)}l_{60}$, luego

e)

$$ {}^{(29)}l_{60} = \sqrt{4r^2 - l_{60}^2} $$

f)

$$ {}^{(23)}l_{60} = \sqrt{4r^2 - {}^{(7)}l_{60}^2} $$

g)

$$ {}^{(19)}l_{60} = \sqrt{4r^2 - {}^{(11)}l_{60}^2} $$

h)

$$ {}^{(17)}l_{60} = \sqrt{4r^2 - {}^{(13)}l_{60}^2} $$

OBS.—Relaciónense las apotemas.

---

23) OBSERVACIONES.

Como se saben inscribir los polígonos de:

a) 3, 6, 12, etc. lados;
b) 4, 8, 16, » »
c) 5, 10, 20, » »
d) 15, 30, 60 » »

se sabrán inscribir, por lo tanto, los espresados por las fórmulas jenerales:

a) 3.2^n lados
b) 4.2^n »
c) 5.2^n »
d) 15.2^n »

Conocidos que sean los lados de los polígonos de n lados, se pueden calcular los lados de los de 2n lados por medio de la fórmula del número 10.

$$l_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}\right)}$$

Para los convexos del jénero 6.2^n, tendremos:

1)

$$l_6 = r \text{ (fundamental)}$$

2)

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

3)

$$l_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

4)

$$l_{48} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

i en jeneral

5)

$$l_{6.2^n} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots n - 1 + \sqrt{3}}}}$$

Para los del jénero $4 . 2^n$ convexos tendremos:

1)

$$l_4 = r\sqrt{2} \text{ (fundamental)}$$

2)

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

3)

$$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

4)

$$l_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

i en jeneral

5)

$$l_{4\,.\,2^n} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots n}}}$$

Para los convexos del jénero $10\,.\,2^n$ tendremos:

1)

$$l_{10} = \frac{r}{2}\left(-1\sqrt{5}\right) \quad \text{(fundamental)}$$

2)

$$l_{20} = r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

3)

$$l_{40} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$

4)

$$l_{80} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}}$$

i en jeneral

5)

$$l_{10\,.\,2^n} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots n-1+\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}}$$

OBS.—La fórmula del número 10 pocas veces se puede aplicar a los polígonos estrellados.

En cambio, el método del Δ determinante es aplicable a todos los polígonos del jénero $4 \cdot 2^n$.

Este método tiene aun mayor aplicacion; pero creemos que en los polígonos de los jéneros $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ i $15 \cdot 2^n$ se debe preferir el teorema de Ptolomeo referente al cuadrilátero inscrito.

LUIS A. SILVA

(Continuará)