HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CARLOS WARGNY

(Continuacion)

CAPÍTULO VII

SISTEMAS DE NUMERACION I ARITMÉTICA PRIMITIVA

La numeracion dijital o representacion de los números por los dedos, ha de considerarse como la primitiva: se ha constatado, en varias lenguas, que los nombres de los diez primeros números corresponden a los de los dedos. Ciertos pueblos no pueden contar mas de diez; i algunos solo llegan a cuatro, designando con las palabras *abundancia o monton* todo número superior al de su cuenta. A este respecto conviene decir que los ejipcios llamaban tambien *monton o pila* a la incógnita de sus ecuaciones. Preténdese que en casi todas las lenguas las palabras *cinco* i *mano* tienen el mismo oríjen; es probable que en los tiempos primitivos se contara de a cinco; i en el número romano X se ha creido ver un doble V. Agregaremos que en Java i Méjico la semana era de cinco dias.

El empleo de los dedos de las manos para contar, condujo naturalmente a hacerlo por decenas; i éste debe haber sido el oríjen de la numeracion decimal. Las palabras once, doce, trece, etc., derivadas del latin *undecim*, *duodecim*, *tredecim*, indican claramente su oríjen. Presumen algunos que los aztecas contaban por veintenas, del empleo de los dedos de las manos i de los piés; i en Francia se dice aun cuatro veintenas por ochenta. Los Bolanos del Africa Occidental cuentan por septenas i los Maoríes por oncenas. Se ha supuesto que para contar muchos objetos, los pueblos primitivos i los salvajes de hoi, se valian de dos personas: la primera llevaba en los dedos de las manos la cuenta de las unidades i la segunda contaba con los dedos las decenas que iba formando la primera. Otros empleaban guijarros o piedrecillas dispuestas en montones de diez. De paso diremos que la palabra *cálculo* proviene de la voz latina *calculus*, guijarro; tal puede haber sido el oríjen del abaco o *suan-pan* usado por los pueblos mas separados unos de otros, como los etruscos, griegos, ejipcios, hindúes, chinos i mejicanos. Hoi dia se emplea en Rusia, China i Japon.

En su forma mas simple el suan-pan se compone de un marco en forma de U, que lleva siete o mas varillas por los cuales pueden correr unos dados o bolas. Para cada unidad que se cuenta, se hace avanzar un dado en la primera varilla; una vez que se ha llegado a diez, se corre un dado en la segunda varilla; para la primera centena se hace correr un dado en la tercera varilla i así sucesivamente. Se comprende que en este sistema se puede figurar cualquier número. La figura 7 señala el número 204156.

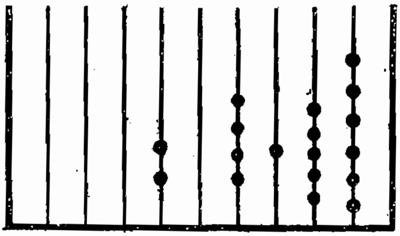

Fig. 7

Los abacos romanos llevaban dos varillas marjinales que tenian 4 i 12 dados respectivamente i que se usaban para sumar cuartos i doceavos. Con ellos se podia contar hasta 10^8.

En los abacos rusos el marco es cerrado, las varillas fijas i cada una lleva diez dados. Para contar basta pasar los dados de un lado a otro.

Se facilitan los cálculos colocando los cinco primeros dados o poniéndoles señales especiales que indiquen los números que representan. Parece que Gerberto introdujo estas señales llamadas *ápices.*

En los abacos chinos i japoneses, cada varilla lleva cinco dados del mismo tamaño i uno mayor que equivale á otros cinco. El manejo del suan-pan es mui sencillo i algunos japoneses son tan hábiles en sus cálculos que con esta máquina de calcular pueden sumar al mismo tiempo que les dictan los sumandos.

Existen diversas obras que dan las reglas para efectuar las cuatro primeras operaciones de aritmética.

Es evidente que el abaco presenta una idea rudimentaria del valor que, segun su posicion, tienen las cifras en el sistema decimal. Sin embargo, la notacion numérica se uniformó solamente en el siglo XIII, con la introduccion del cero.

Remontándonos mas aun, el oríjen de esta notacion ha de encontrarse en el *rayado:* una raya representa la unidad; dos rayas, dos unidades; i así sucesivamente.

En los jeroglíficos ejipcios las cifras 1, 2, 3 se figuran con 1, 2, 3 dedos, que mas tarde dejeneraron en rayas. Despues se introdujo el rayado abreviado, es decir, símbolos especiales que representaban 10, 100 i otros números mayores. Segun Jámblico, tal fué la primera notacion numérica de los griegos. Los romanos o etruscos agregaron a su vez símbolos especiales para 5,50,..: V, L, C, D, M, son abreviaciones de otros símbolos o iniciales de palabras, tales como *centum, mille.* Las formas sustractivas IV, IX, XL parecen ser mas modernas.

En Atica, 5, *pente*, se representaba por π; 10, *deka*, por Δ; 100, *ekatón*, por H; 1000 *Xilioi*, por X. En el siglo III A. J. C., los griegos adoptaron el sistema *alejandrino*, en el cual las 9 primeras letras del alfabeto representaban los números 1 a 9; las 9 siguientes, 10 a 90; i las 9 siguientes, 100 a 900. Pero como el alfabeto griego solo constaba de 24 letras, agregaron la *digamma*, *Kappa* i un carácter fenicio. El número 11 se escribia 10+1, es decir, i α'; 12=i β'; i mediante índices i sub-índices se podia escribir hasta 100 millones.

No cabe duda de que el cálculo se hacia, no con los números escritos, sino con un instrumento, probablemente el abaco.

Solamente los resultados se escribian. Un cálculo con las cifras escritas es posterior i los griegos en verdad no lo usaron. El escaso progreso que tuvo la aritmética entre los griegos, hai que atribuirlo a su defectuoso sistema de notacion. Para multiplicar, sabian de memoria la tabla pitagórica que nosotros usamos; pero cuando querian multiplicar 400 por 3, tenian que sumar:

$$400 \times 3 = 400 + 400 + 400.$$

Para dividir 6152 por 15, ensayaban primeramente todos los múltiplos de 15 hasta llegar a 6000; luego los mismos hasta obtener 150 i obtenian así.

$$6152 : 15 = 400 + 10, \text{ con la resta } 2$$

Algunos matemáticos, entre los cuales mencionaremos a Heron de Alejandría, a Teon i a Eutocio, procedian de un modo parecido al nuestro:

$$\begin{aligned} 13 \times 18 &= (10+3)\,(10+8) \\ &= 10\,(10+8) + 3\,(10+8) \\ &= 100 + 80 + 30 + 24 = 234. \end{aligned}$$

Es probable que la última suma la obtuvieran con el abaco.

Los diferentes sistemas que dejamos espuestos, fueron sustituidos, en la Edad Media, por el sistema de los árabes, que comprende las diez cifras hoi en uso, i cuyo valor aumenta diez veces cuando una cifra está colocada a la izquierda de otra. En el Capítulo XI daremos a conocer la historia de este sistema de numeracion.

SEGUNDO PERIODO

Las Matemáticas durante la Edad Media i el Renacimiento

Este período se caracteriza por el desarrollo de la aritmética, áljebra i trigonometría. Comienza en el siglo VI i termina en el siglo XVII, ántes de la creacion de la jeometría analítica i del cálculo infinitesimal.

En el capítulo VIII que sigue, consideramos los primeros pasos de la ciencia en el occidente de Europa i su desenvolvimiento durante la Edad Media; el capítulo IX está destinado a los trabajos de los árabes i de los hindúes; el X, a la introduccion de estos conocimientos en Europa; el XI, al progreso de la aritmética; el XII, al desenvolvimiento de la ciencia despues de la invencion de la imprenta; i el XIII, a la mecánica i a la jeometría pura.

CAPITULO VIII

NACIMIENTO DE LA ENSEÑANZA. SIGLOS VI, VII I VIII

En medio de las guerras perpetuas que asolaron a Europa en aquellos tiempos, la Ciencia no pudo tener cultivadores, i en estos tres primeros siglos, el único refujio seguro i tranquilo, lo encontraron los hombres de estudio en los conventos de los Benedictinos, quienes cultivaron las letras i hacian uso del abaco i de la teneduría de libros.

La tradicion de la enseñanza griega i alejandrina desapareció gradualmente; en las ciudades principales las obras de los grandes maestros, no teniendo lectores, carecian de valor i se hicieron difíciles de encontrar. A pesar de todo, rejistra la historia, en el siglo VI, tres nombres ilustres: Boecio, Casiodoro e Isidoro, cuyas obras, aunque desprovistas de orijinalidad, fueron estudiadas durante siete siglos en las escuelas.

Boecio (475 - 526) nació en Roma i era hijo de una de las distinguidas familias de esta ciudad. Conocedor profundo de la literatura i ciencia griegas, se ha creido que se educó en Aténas.

Inclinábase por las bellas letras; mas, creyendo que «el mundo no seria feliz miéntras los reyes no fueran filósofos o los filósofos reyes», tomó una parte activa en la política. Famoso por su inagotable caridad, i lo que es mas estraño, por el cuidado que ponia en conceder sus dádivas a los que las merecian, fué elejido cónsul a una edad prematura, i aprovechó su alta posicion para reformar la acuñacion de la moneda i hacer comun el uso de los cuadrantes solares i clepsidros.

Su integridad i la proteccion que dispensó al oprimido, le acarrearon el odio de los tribunales de justicia. Encontrándose ausente de Roma, fué condenado a muerte: se le arrestó en Ticinio i fué torturado; amarrósele una cuerda al cuello hasta hacerle saltar los ojos de las órbitas i se le ultimó a golpes de maza. Mas tarde, cuando se le reconocieron sus méritos, se erijieron en su honor i a espensas del Estado, monumentos i estátuas.

Boecio fué el último romano de mérito que estudiara la literatura griega; sus obras esparcieron por Europa algunos destellos de la vida intelectual del mundo antiguo, hasta el siglo VIII, época en que las obras de Aristóteles comenzaron a ser estudiadas por los de mas sólida preparacion. El renombre de Boecio se eclipsó lentamente, i hoi dia apénas es conocido por sus *Consolatio*. Sus obras de matemáticas, editadas por Friedlein en 1867, se componen de una *Jeometría* que contiene los enunciados solos del libro I de Euclides i algunas proposiciones escojidas de los libros III i IV, pero con numerosas aplicaciones numéricas. Su *Aritmética* está fundada en la de Nicómaco.

Casiodoro (490-566), romano tambien, compuso dos obras, en las que trata del *trivio* preliminar: gramática, lójica i retórica; i del *cuadrivio* matemático: aritmética, jeometría, música i astronomía.

Durante la Edad Media se consideraron estas obras como modelos en su jénero.

Isidoro (570-636), obispo de Sevilla, es autor de una enciclopedia en 20 volúmenes, titulada *Oríjenes*. El tercer volúmen está consagrado al cuadrivio.

LAS ESCUELAS DE LAS CATEDRALES I DE LOS CONVENTOS

A fines del siglo VIII, Carlomagno creó su imperio de occidente i, aconsejado por Alcuino i Clément, se propuso desarrollar la enseñanza, estableciendo escuelas al lado de las catedrales i monasterios, medida que fué materialmente apoyada por los Papas.

Alcuino, ingles de oríjen, nació en Yorkshire i fué educado por el Arzobispo Egberto, a quien sucedió como director de la escuela. A su regreso de un viaje que habia hecho a Roma, encontróse en Parma con Carlomagno, quien lo decidió a quedarse en la corte, para que se hiciera cargo de la enseñanza de la retórica, la lógica, las matemáticas i la teolojía. Llegó a ser el amigo mas íntimo e influyente del emperador; i en sus últimos años, creó la célebre escuela de San Martin de Tours. Entre los escritos de Alcuino hai una coleccion de proposiciones de aritmética destinadas a la juventud. Estas proposiciones son cuestiones sencillas, determinadas o indeterminadas, como la siguiente, que es una de las mas difíciles: «Se distribuyen 100 medidas de trigo entre 100 personas, de manera que cada hombre recibe 3, cada mujer 2 i cada niño 1 1/2. Determinar el número de hombres i ñiños».

Si representamos por x, y, z los números correspondientes, tendremos el sistema de ecuaciones indeterminadas:

$$x + y + z = 100,$$

$$3x + 2y + 1,5\, z = 100,$$

que tiene 6 soluciones enteras i positivas, i de las cuales Alcuino da una sola:

$$x = 11,\ y = 15,\ z = 14.$$

En aquellos tiempos, la enseñanza se reducia a la aritmética i jeometría de Boecio, i al uso del abaco i de la tabla pitagórica. Despues de la muerte de Carlomagno se redujo aun mas: quedaron escluidas las ciencias, i por lo jeneral, los doctos se satisfacian con saber el latin, la música i la teolojía. Sin embargo, en las escuelas de los grandes maestros, la enseñanza abarcaba el trivio i cuadrivio: el primero quedaba limitado a la lectura i escritura del latin, el segundo no comprendia mas que la aritmética aplicada a las cuentas; la música al cántico de las iglesias; la jeometría a los rudimentos de la agrimensura; i la astronomía a la determinacion de los dias de fiesta i de ayuno. La frase siguiente abarcaba las siete artes liberales:

Lingua, tropus, ratió, numerus, tonus, angulus, astra.

El estudiante que pasaba del trivio, era mirado como un erudito:

Qui tria, qui septem, qui totum scibile novit.

Tal fué el estado de la enseñanza en los siglos IX i X.

Gerberto (950-1003) era de la Aquitania. Desde niño se distinguió por su viva intelijencia i recibió una sólida instruccion en Aurillac, España. En 971 se encuentra en Roma donde llama la atencion por sus conocimientos musicales i astronómicos. Para perfeccionarse en la lójica, trasladóse a Reims, asiento de la escuela mas célebre de Europa, fundada por el arzobispo Adalberon.

Gerberto llegó a ser profesor en ella i su reputacion se acrecentó de tal manera que Hugo Capeto le confió la educacion de su hijo Roberto, que mas tarde fué rey de Francia.

Gerberto era famoso por los abacos i globos terrestres i celestes que construia. Estos últimos los daba en cambio de obras clásicas; i llegó aun a establecer en las principales ciudades ajencias que hacian este intercambio. Atribúyese a él la conservacion de muchas obras latinas. No obstante, excluia de su biblioteca a los Padres de la Iglesia i a los autores griegos. En 982 dirijia la abadia de Bobbio; en 991 era arzobispo de Reims, de Ravena en 998 i en 999 fué elejido Papa con el nombre de Silvestre II. Fué uno de los precursores de Pedro el Ermitaño, pues trató de levantar la cristiandad en contra de los turcos; pero murió el 12 de Mayo de 1003. Creemos que su biblioteca se conserva en el Vaticano.

Una personalidad tan notable debió haber producido profunda impresion en todos los espíritus; i así se esplican los portentos que de él se cuentan. Parece ser efectivo, a pesar de todo, que construyó un reloj que se conservaba en Magdeburgo, i un órgano movido por el vapor que funcionó en Reims.

Sus obras matemáticas versan sobre las reglas del abaco, la aritmética i la jeometría. Introdujo en el abaco la mejora de los *ápices*, o colecciones de nueve unidades, que otros quieren atribuir a los hindúes o árabes. El paso de esta representacion concreta de los números a la numeracion escrita, por mas sencilla que sea para muchos, es mui probable que no se le ocurriera a Gerberto. En su jeometría aplica los primeros principios a la planimetría i altimetría; i es de presumir que todos estos conocimientos los sacara de algunos manuales de la escuela pitagórica. Uno de los problemas mas difíciles que resuelve, es el de calcular los catetos, conocidas la hipotenusa i el área de un triángulo rectángulo. Sean c i h² los datos; encuentra para los catetos el valor

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{c^2 + 4h^2} \pm \sqrt{c^2 - 4h^2}\right].$$

Bernelino, alumno de Gerberto, publicó un libro sobre el abaco, sacado de las lecciones de su maestro. Esta obra es de interes para la historia, porque en él se ve que los números árabes no eran aun conocidos en Europa.

CREACION DE LAS PRIMERAS UNIVERSIDADES EN LA EDAD MEDIA.

A fines del siglo XI o principios del siglo XII, estableciéronse al lado de las escuelas de las catedrales i monasterios, escuelas libres en que los maestros i alumnos formaban una comunidad bajo la denominacion de: *Universitas magistrorum et scholarium.*

En Paris, la direccion de los intereses de la comunidad incumbia a los maestros; pero en Bolonia formaban parte de esta direccion tanto los maestros como los alumnos. La reglamentacion de estas corporaciones es de suponer que se hiciera conforme a la de las escuelas musulmanas de Córdoba.

Como quiera que sea, a fines del siglo XII existian ya organizadas estas asociaciones en Paris, Bolonia, Salerno, Oxford i Cambridge. En Bolonia se daba preferencia al estudio del Derecho i en Salerno a la Medicina, lo que hace presumir que no eran propiamente universidades, porque estos centros de instruccion abarcan todos los conocimientos del saber humano.

En los primeros tiempos de su formacion, las universidades trabajaron independientemente de las escuelas parroquiales i monásticas; pero, poco a poco, prevaleció la organizacion autónoma de las primeras, dirijidas, como hemos dicho, por los maestros i sus alumnos.

Se ha querido dejar bien establecido en esta parte de la historia de la ciencia, que las universidades, desde sus comienzos, no fueron corporaciones eclesiásticas, por mas que sus maestros fueron sacerdotes o monjes, que eran, por lo jeneral, las únicas personas ilustradas de su tiempo. Cuando una universidad de maestros i alumnos contaba con un número suficiente de asistentes a las aulas, reclamaba de la autoridad i se le concedian privilejios legales, como el de fijar los emolumentos de sus profesores, el de poseer una personería jurídica i la facultad de otorgar títulos o grados de maestro.

La Universidad de Paris es la mas antigua, pues fué fundada en 1150 i reconocida oficialmente en 1200. En 1214 fué reconocida la de Oxford i en 1231 la de Cambridge, las cuales tomaron como modelo a la de Paris. En el siglo XIII fueron creadas las universidades de Nápoles, Orleans, Padua i Praga; i en el siglo XIV, las de Pavía i Viena. El derecho de conferir grados de maestro lo adquirió la Universidad de Paris en 1283, la de Oxford en 1286 i la de Cambridge en 1318.

Todos estos grandes centros de instruccion estaban estrechamente ligados entre sí i sus tendencias i aspiraciones eran solo educativas.

En ellos eran admitidos los educandos a los once o doce años de edad, como colejiales, i principiaban por recibir una instruccion preparatoria que duraba cuatro años i que comprendia el trivio, es decir, la gramática latina, la lójica i la retórica.

Formaban estos colejiales una facultad de rango inferior i podian obtener el grado de maestro de gramática o de retórica. Despues del estudio completo del trivio, se le conferia el grado de bachiller en artes, dejaba de ser colejial i pasaba al rango de alumno. Entónces contaba unos 17 a 18 años. En Cambridge el colejial se denominaba *juvenis* i el alumno, *vir*. El bachiller no podia enseñar, salvo casos excepcionales, i su posicion era la de nuestros estudiantes universitarios. Los que proseguian sus estudios, sea del derecho civil o el canónico, jeneralmente practicaban durante tres años el cuadrivio, i los conocimientos que adquirian eran los consignados en las obras de Boecio e Isidoro. El título de maestro en artes era concedido al fin de este nuevo período de educacion. Con él adquiria el derecho de enseñar i solo lo podian obtener aquellos que habian seguido los cursos con regularidad i cuyas costumbres públicas i privadas eran irreprochables.

Aunque mal retribuidos al principio, los nuevos profesores comprendieron mui luego que su título tenia de todos modos un valor pecuniario, por lo cual a fines del siglo XVI las universidades acordaron conferir el grado únicamente a los que se comprometian a enseñar en sus aulas durante un año, por lo ménos. Poco despues restrinjieron mas aun esta concesion i en el siglo XV negaron el título a los que no justificaran su competencia. Este nuevo privilejio universitario fué concedido en 1426 a la Universidad de Paris, con motivo de la demanda que contra ésta entablara el alumno eslavo Pablo Nicolas, quien pretendia que se le confiriera el título de estudiante i la Universidad se lo negó por no considerarlo competente.

Los tribunales le dieron la razon a la Universidad i Pablo Nicolas fué de este modo el primer estudiante rechazado por un consejo universitario.

El estudio de las ciencias i de las matemáticas era obligatorio para los bachilleres; pero hasta la época del Renacimiento se consagraron de preferencia a la léjica, la filosofía i la teolojía. Las sutilezas de la filosofía escolástica formaban un campo ingrato i árido de estudios; mas, fuerza es confesar que son excelentes ejercicios intelectuales que vigorizan el raciocinio i contribuyen poderosamente a la formacion de un lenguaje propio i preciso.

En nuestra historia hemos llegado a la época en que los trabajos matemáticos de los árabes comenzaron a ser introducidos en el occidente de Europa, por lo cual los daremos a conocer en el capítulo que sigue.

CAPITULO IX

LAS MATEMÁTICAS DE LOS ÁRABES

La Historia de las Matemáticas entre los árabes nos es conocida en sus caractéres jenerales, i está fuera de discusion que la fuente de sus conocimientos la encontraron en las obras de los griegos i de los hindúes.

CONOCIMIENTOS DE ORÍJEN GRIEGO

Cuando los árabes se establecieron en las ciudades que conquistaron, fueron atacados por diversas enfermedades que no habian conocido en su vida del desierto; i como la ciencia de la medicina era conocida solamente de los griegos i judios, los conquistadores viéronse obligados a entregarse en sus manos, i aun llegaron a confiarles la educacion de sus hijos.

Tal es el oríjen de la trasmision de la ciencia antigua a los moros. Ademas, en las mismas ciudades sometidas, tales como Edesa, Antioquía, Emesa i en la misma Damasco, existian todavía pequeñas escuelas griegas que conservaban la tradicion como así mismo los resultados de la enseñanza helénica.

Los árabes pronto observaron que sus médicos sacaban sus conocimientos de las obras de Hipócrates, Aristóteles i Galeno; i a fines del año 800, el famoso Califa Harún al Raschid ordenó su traduccion al árabe. Su sucesor Al Mamun (813-833) envió comisiones especiales a Constantinopla i al Indostan para que sacaran el mayor número posible de copias de las obras científicas. Organizó ademas un personal de eruditos sirios encargados de traducir estos libros al árabe i al siriaco; i para desarmar el fanatismo, confiriòles el título de Doctores del Califa. En 851 constituyéronse en

Academia, i el califa Mutawakil encomendó su direccion a Honein ibnishak, el mas renombrado entre ellos. El nuevo director i su hijo, como ignoraban las matemáticas, al hacer la traduccion encomendada, dejaron escaparse diversos errores, que mas tarde corrijió Tabit ibn korra, i así se consiguieron ediciones que tuvieron la aprobacion oficial.

A fines del siglo IX los árabes ya poseian traducciones de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio i Tolomeo. Algunas de estas obras las conocemos hoi dia solamente por estas traducciones.

Diofanto habia quedado completamente ignorado, i su grande obra no fué conocida sino 150 años mas tarde, cuando los árabes ya estaban familiarizados con el áljebra.

CONOCIMIENTOS DE ORÍJEN HINDÚ

El comercio considerable que mantenian los árabes con la India, los puso en relacion con los matemáticos hindúes i sus trabajos de áljebra, que comenzaron a estudiar a principios del siglo IX.

Como los conocimientos de los árabes en las ciencias de los números i de las cantidades están basados en estos trabajos, daremos algunos detalles de ellos i sus autores.

Los hindúes (habitantes del Indostan), lo mismo que los chinos, se consideran el pueblo mas antiguo del mundo i pretenden ser ellos los creadores de todas las ciencias.

Las investigaciones mas recientes que a este respecto se han hecho, desvirtúan esta aseveracion, puesto que no queda ningun vestijio de carácter nacional anterior a la invasion de los aryas, que tuvo lugar en el siglo V o VI. Esta raza siempre se reconoció superior a los aboríjenes; i si mas tarde dejeneró, como en Europa, fué debido a la diversidad de clima que los agotó poco a poco. No obstante su decaimiento, produjo dos escritores de gran talento: Aryabata i Bramagupta.

Aryabata (476?) nació en Patra i es considerado como el creador del análisis aljebráico, aunque algunos opinan que conocia la aritmética de Diofanto. Su obra principal, titulada *Aryabatiya*, es una coleccion de diversas proposiciones, sin ninguna demostracion i que están escritas en versos mnemónicos. Compónese de cuatro libros, de los cuales los tres primeros tratan de astronomía i trigonometría esférica; i el último contiene 33 reglas de aritmética, áljebra i trigonometría plana. Presúmese que Aryabata estudió las Matemáticas únicamente porque son necesarias en astronomía En áljebra, Aryabata da las sumas de los primeros números, de sus cuadrados i de sus cubos; da a conocer igualmente la solucion jeneral de las ecuaciones de segundo grado i las soluciones enteras de las ecuaciones indeterminadas de primer grado. En vista de las soluciones numéricas, es de creer que conociera la numeracion decimal. En trigonometría construye una tabla de senos naturales de $3^{\circ}\,45'$ en $3^{\circ}\,45'$, para lo cual hace sen $3^{\circ}\,45'=225$ i en seguida aplica un cálculo equivalente a la fórmula sen $(n-1)\,a$ — sen $n\,a$ $=$ sen $n\,a$ — sen $(n-1)\,a$ — sen $n\,a$ coseca, en la que es $a=3^{\circ}\,45'$. De este modo encuentra exactamente que sen $90^{\circ}=3438$, para lo cual ha supuesto que es $\pi=3.1416$. Este valor tan aproximado de π aparece tambien en otra parte de su obra. Su fórmula trigonométrica exacta es

$$\text{sen}\,(n+1)\,a - \text{sen}\,n\,a = \text{sen}\,n\,a - \text{sen}\,(n-1)\,a$$

$$- 4\,\text{sen}\,n\,a\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,a.$$

Segun lo cual, Aryabata supone

$$4\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,a = \text{casec}\,a \;\text{ o }\; 2\,\text{sen}\,a = 1 + \text{sen}\,2\,a, \text{ o aun}$$

$$2 \times (225) = 1 + 449.$$

Un gran número de proposiciones que enuncia son erróneas.

Bramagupta (598–660) escribió la obra *Bramasfutasidanta* o sistema astronómico de Brama, en la cual dos de sus capítulos están destinados a la aritmética, áljebra i jeometría. La aritmética no tiene símbolos i los problemas se resuelven por la regla de tres; los mas son de regla de interes. En el áljebra tampoco usa símbolos i estudia las progresiones aritméticas i la ecuacion de segundo grado, en cuya solucion da el radical negativo. El siguiente problema es de este autor: Dos ascetas viven en la cumbre de una roca de altura h i que dista $m h$ de una aldea. Uno de ellos baja en direccion a la aldea i el otro sube la altura x i baja en seguida para dirijirse al mismo punto. Determinar el valor de x, sabiendo que ámbos recorrieron la misma distancia. Bramagupta resuelve correctamente el problema, pues encuentra que es

$$x = \frac{m h}{m + 2}$$

i supone $h = 100$ i $m = 2$. Resuelve las ecuaciones indeterminadas tal como hoi se hace; i para la de 2.º grado

$$n x^2 + 1 = y$$

señala las soluciones:

$$x = \frac{2 t}{t^2 - n}, \quad y = \frac{t^2 + n}{t^2 - n}.$$

Hace ver que aquella ecuacion depende de otra particular que no menciona.

En el siglo XVII, Fermat propuso este problema a Wallis i a Lord Brouncker, i este último encontró las soluciones de Bramagupta.

Un matemático hindú demostró tambien que la ecuacion

$$y^2 = n x^2 - 1$$

tiene soluciones enteras cuando n es la suma de dos cuadrados enteros.

Conviene advertir que ántes de la introduccion del áljebra sincopada, los aljebristas griegos, hindúes, árabes e italianos, no distinguian los problemas determinados de los indeterminados.

En jeometría, Bramagupta demostró el teorema de Pitágoras (Euc. I, 47); dió espresiones para el área del triángulo i del cuadrilátero inscrito en funcion de los tres lados; i probó que el área del círculo es equivalente a la de un rectángulo cuyos lados son el radio i la semicircunferencia; llegó al conocimieto de que es

$$\pi = \sqrt{10};$$

corrijió los cálculos de Aryabata relativos a la superficie i volúmen de la pirámide i cono. El resto de su obra es incomprensible; i se supone que trata de determinar diversos elementos del cuadrilátero inscrito en funcion de los lados. Los resultados, en su mayor parte, son erróneos.

Baskara (1114—) sucedió a Bramagupta en la direccion del Observatorio de Ujein. Compuso una astronomía, cuyo primer capítulo está destinado a la aritmética; el segundo, al áljebra; el tercero i cuarto a la astronomía i a la esfera. Esta obra, que tuvo una grande influencia entre los árabes, sólo fué conocida indirectamente en Europa a fines del siglo XII.

El testo es en verso con esplicaciones en prosa; i por lo que respecta a su orijinalidad, no es posible admitir que el autor desconociera las traducciones de los árabes i, en consecuencia, los trabajos de los griegos.

El áljebra es sincopada i casi simbólica, lo que es ya un adelanto considerable sobre las obras de Bramagupta i de los árabes. Igual observacion cabe hacer sobre su jeometría.

El primer libro, titulado *Silavati*, comienza por una invocacion al dios de la Sabiduría; i la disposicion jeneral de las materias es como sigue:

1. Sistema de pesos i medidas, 2. numeracion decimal, 3. las ocho operaciones: adicion, sustraccion, multiplicacion,

division, elevacion al cuadrado i al cubo, estraccion de raiz cuadrada i cúbica; 4. reduccion de fracciones a un comun denominador, 5. fracciones de fracciones, 6. las ocho operaciones de las fracciones, 7. *reglas del cero:*

$$a \pm 0 = a,\ 0^2 = 0,\ \sqrt{0} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,$$

8. resolucion de ecuaciones sencillas, 9. regla de falsa posicion, 10. ecuaciones simultáneas de primer grado, 11. ecuaciones de segundo grado, 12. regla de tres simple i compuesta, 13. intereses, descuento i particion proporcional; 14. Problema de las fuentes que llenan un estanque, 15. cambio, 16. progresiones aritméticas i sumas de los cuadrados i cubos, 17. progresiones jeométricas, 18. problemas sobre triángulos i cuadriláteros, 19. valor aproximado de π, 20. fórmulas trigonométricas, 21. volúmen de los sólidos, 22. ecuaciones indeterminadas lineales, 23. combinaciones.

Es el libro mas antiguo conocido que haga una esposicion metódica del sistema de numeracion decimal. Se puede suponer que este sistema era conocido de Aryabata i Bramagupta; pero sólo en la obra de Baskara encontramos las cifras de los árabes o hindúes i un signo especial para cero. Por lo que hace al empleo de estas cifras, no se puede poner en duda la asercion, hecha por diversos autores, de que se comenzaron a usar a principios del siglo VII. En el capítulo XI daremos ámplios detalles a este respecto.

El *Silavati* da las reglas, hoi en uso, de las cuatro primeras operaciones de aritmética; i en su mayor parte está consagrado a la regla de tres directa e inversa, simple i compuesta, i a las cuestiones de interes i cambio; i en las aplicaciones numéricas se emplea el actual sistema de numeracion decimal.

Baskara era tan célebre astrólogo como matemático; i aquella ciencia le predijo que el matrimonio de su hija Silavati le seria fatal; por lo cual no permitió que se separara de su lado: Dedicóle el primer libro de su grande obra; i varias de las cuestiones que trata están dedicadas a la misma, como puede leerse en la siguiente: «Amable i querida Silavati, de ojos tan tiernos cual los del tímido cervatillo, dime qué número es el producto de 135 por 12. Si procedes multiplicando, sea total o parcialmente, sea por division o separando las cifras, niña dichosa, díme el cuociente del producto por el mismo multiplicador».

Las obras matemáticas de los hindúes, en las diferentes cuestiones que estudian, traen intercalados numerosos detalles de la vida social i económica del pais. Al hablar del precio de las esclavas, Baskara hace saber que su precio mas elevado es cuando tienen 16 años i que despues decrece en razon inversa de la edad. Así, si este precio es de 32 nishkas a los 16 años, a los 20 será de

$$\frac{16 \times 32}{20} = 25,6.$$

Segun esta estimacion una esclava de 16 años valdria lo que 8 bueyes de dos años de trabajo. El interes del capital en el Indostan alcanzaba al $3^1/_2\,^0/_0$ i aun al $5\,^0/_0$ mensual. Entre estos detalles se encuentra el precio de las mercaderías i del trabajo.

El capítulo titulado *Bija Garita* comienza por una sentencia tan injeniosamente elaborada que puede interpretarse como una verdad relijiosa, filosófica o matemática. Vienen en seguida las operaciones jenerales del análisis. La notacion que emplea es la siguiente: los símbolos son abreviaciones e iniciales de palabras; indica la sustraccion por un punto colocado encima del coeficiente del sustraendo; la adicion por una simple justaposicion de los sumandos; en lugar de los signos de multiplicacion, de igualdad i desigualdad usa las palabras íntegras; el producto lo señala por la primera sílaba de esta palabra junta a los factores, entre los cuales, a veces, hai un punto; en la division, escribe el divisor debajo del dividendo, sin raya de separacion; i los dos miembros de una ecuacion los pone uno debajo del otro.

Por lo jeneral, emplea la inicial de la palabra color para indicar la incógnita i las letras del alfabeto para las cantidades desconocidas; otras veces hace uso de signos especiales cuando opera con cantidades conocidas o desconocidas. Las iniciales de las palabras *cuadrado* i *cubo* sirven para denotar estas potencias; i la primera sílaba de la voz *raiz* equivale a nuestro signo radical. Los polinomios están siempre ordenados i el último término es el constante. En las ecuaciones escribe el coeficiente despues de la incógnita; no observa ningun órden para los términos posisivos i negativos; cada potencia figura en ámbos miembros de una ecuacion, i cuando una de ellas falta, la escribe con el coeficiente cero.

En seguida de haber fijado estas reglas de notacion, espone las seis operaciones con espresiones aljebráicas; repite las reglas del cero; resuelve varias ecuaciones i termina con el cálculo de los radicales. Diversos problemas tienen un enunciado práctico, con alusiones à las damas i caballeros galantes. Entre las fórmulas trigonométricas llama la atencion la equivalente a la diferencial

$$d\,(\text{sen}\,\theta) = \cos\theta\, d\,\theta.$$

Conviene advertir que, con el objeto de reunir en una misma parte de nuestra historia todos los autores hindúes, hemos citado a Bascara, sin atenernos al órden cronolójico. En efecto, este autor es posterior a todos los autores árabes de que vamos a hablar.

Es indudable que los árabes, despues de haber adoptado los métodos aritméticos de los hindúes, estudiaron de preferencia a Aryabatá i Bramagupta. En el siglo VIII adoptaron el sistema de numeracion decimal, de uso corriente en el comercio de los hindúes; i la fecha mas antigua que conocemos del empleo de este sistema es la del año 773. Termiaremos dejando establecido que estos dos pueblos, losn hindúes i los árabes, raras veces hicieron uso del abaco.

LAS MATEMÁTICAS DE LOS ÁRABES

Despues de haber hecho un bosquejo del orijen de los conocimientos matemáticos de los árabes, nos cabe hacer la historia de sus obras i de los autores que las produjeron. Podemos decir, en resúmen, que a fines del siglo VIII los árabes estaban en posesion de una buena notacion numérica i de la aritmética de Bramagupta; i que ántes del siglo IX conocian las obras maestras de jeometría, mecánica i astronomía de los griegos.

Alkarismi (800-860?). El primero i por diversos títulos, el mas ilustre de los matemáticos árabes, fué *Mohamed ibn Musa abn Djefar Al Kuarizmi*, indicando la última denominacion el lugar de su nacimiento, Korasán. Fué bibliotecario del Califa Al Mamún; viajó como delegado oficial por Afganistan i a su regreso debe haber recorrido la India. En 830 escribió un texto de áljebra, segun la obra de Bramagupta i en la cual se vale, como los griegos, de las líneas para de mostrar las propiedades de los números. Se presume que el trabajo que lleva por título: *Algoritmi De Numero Indorum* i que se conserva en la biblioteca de Cambridge, sea una traduccion de una aritmética de este autor.

Compuso ademas algunas tablas astronómicas estractadas de los trabajos de Tolomeo i de Bramagupta. El áljebra de este autor tiene una verdadera importancia histórica, porque con este libro se introdujo en Europa el uso do la numeracion decimal. Se titula *Al-Gebr we'l mukala* : la voz árabe *algebr*, orijen de nuestra denominacion áljebra, significa *restitucion* i se refiere a que se pueden aumentar ó disminuir en una misma cantidad los dos miembros de una ecuacion.

La otra voz *almukala*, se traduce por reduccion de términos semejantes. La incógnita es llamada «la cosa» ó «la raiz», i tal es el verdadero orijen de la palabra con que hoi designamos el valor de la incógnita. El cuadrado de la incógnita se denomina «potencia», i las cantidades conocidas son siempre números.

La obra consta de cinco partes. En la primera resuelve, sin dar ninguna demostracion, las ecuaciones de 2.º grado que divide en seis clases, a saber:

I. $ax^2=bx$,	II. $ax^2=c$,
III. $bx=c$,	IV. $ax^2+bx=c$,
V. $ax^2+c=bx$,	VI. $ax^2=bx+c$.

Aquí a, b, c son números positivos i en las aplicaciones hace $a=1$. No considera mas que las raices reales i positivas, pero reconoce la existencia de las dos raices, lo que jamas hicieron los griegos. Cuando las dos raices son positivas, considera solamente la de radical negativo. En sus demostraciones se vale de la jeometría, tal como lo hace Euclides en la proposicion 4, del libro II. Para resolver la ecuacion $x^2+10x=29$ o la jeneral $x^2+px=q$, procede como sigue:

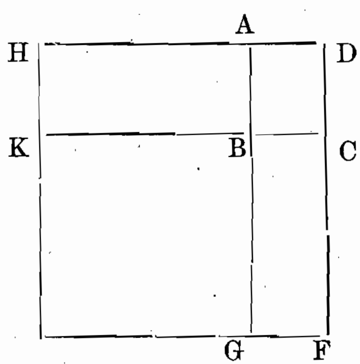

Figura 8

Sea $AB=x$. Construyamos el cuadrado A B C D i prolonguemos sus lados en la lonjitud $CF=AH=5$ (o $\frac{1}{2}$ p), i *completemos* el cuadrado.

Tendremos,

$$AC=X^2, \; BH=5x, \; BF=5x;$$

cio; i fué la base de los primeros conocimientos de aritmética decimal i de áljebra que adquirieron los italianos.

Tabit ibn Korra (836 - 901), prosiguió la obra de Alkarismi; tradujo las principales producciones de Euclides, Apolonio, Arquímedes i Tolomeo; i compuso varios tratados que se han perdido, salvo un fragmento en que resuelve las ecuaciones cúbicas con ayuda de la jeometría, como se dirá en seguida.

Tabit ibn Korra es considerado como uno de los sabios mas brillantes de la civilizacion árabe.

El áljebra continuó su mejora i progreso entre los árabes, especialmente en la resolucion de las ecuaciones i la teoría de los números.

A principios del siglo XI sobresalieron dos matemáticos eminentes: Alkayami i Alkarki.

Alkayami resolvia las ecuaciones de tercer grado determinando la interseccion de una cónica i un círculo.

Segun él, la ecuacion

$$x^3 + b^2 x = b^2 c$$

tiene por raiz la abscisa de la interseccion de la parábola $x^2 = by$ i del círculo $y^2 = (c-x)$.

La cúbica

$$x^3 + a x^2 = c^2$$

tiene igualmente por raiz la abscisa comun a las cónicas $xy = c^2$, $y^2 = c(x+a)$.

Del mismo modo,

$$x^3 \pm ax^2 + b^2 x = b^2 c$$

se resuelve por medio de los lugares

$$y^2 = (x \pm a)(c + x), \quad x(b \pm y) = bc.$$

Por último, encontró ademas que la ecuacion del cuarto grado

$$(100 - x^2)(10 - x)^2 = 8\,100,$$

tiene por raiz la intersección de

$$(10-x)\,y=90, \quad x^2+y^2=100.$$

Se ha pretendido que Alkayami sabia que la suma de dos cubos no puede ser un cubo, es decir, que es imposible resolver en números enteros la ecuacion

$$x^3+y^3=z^3.$$

El conocimiento de este teorema, que pudo haber encontrado por una induccion atrevida, manifiesta el progreso estraordinario que los árabes hicieron en áljebra.

Alkarki (hácia 1000) dió las sumas de la primera, segunda i tercera potencias de los primeros números enteros; resolvió ecuaciones de la forma

$$ax^{2p}\pm bx^p\pm c=0,$$

i encuentra que es $\sqrt{50}=\sqrt{8}+\sqrt{18}$.

Por mas que los métodos aljebráicos de los árabes revistan un carácter jeneral, sus aplicaciones son siempre numéricas i las dos ciencias, áljebra i aritmética, se confunden en una sola. Ateniéndonos al testo de estas obras, las cuatro primeras operaciones las practicaban en la misma forma en que hoi lo hacemos; sus problemas son los mismos de nuestros testos modernos i están resueltos de igual manera. Mejoraron la notacion aljebraica, separando el numerador del denominador por una raya: a—b, a / b o $\frac{a}{b}$.

Alhosein (980 - 1031) conocia la prueba por 9 de la adicion i multiplicacion que en el dia se practica en nuestras escuelas.

Los árabes aceptaron las teorías astronómicas de Hiparco Tolomeo, sin hacerlas progresar de un modo notable; i el alifa Almamún provocó la medida de un arco de meridiano de un grado i la determinacion de la oblicuidad de la eclíptica.

Albategni (877-929) nació en Batán, Mesopotamia, i figura entre los astrónomos árabes mas antiguos. Su obra, la *Ciencia de las Estrellas* (publicada por Regiomontano en 1537) contiene el descubrimiento del desplazamiento del apojeo del sol. En esta obra los ángulos son determinados por la semi-cuerda del arco doble, es decir, por el seno, haciendo $r = 1$. Se ignora si conocia las obras de Aryabata i Bramagupta en que se usa esta medida; pero ya hemos visto que Hiparco i Tolomeo habian usado las cuerdas de los arcos para igual objeto. Albategni conocia ademas la fórmula fundamental de la trigonometría esférica, que en nuestos testos de estudio aparece con la forma

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Albuziani (940 - 998) conocido tambien con el nombre de Abulwafa, descubrió algunas funciones trigonométricas i construyó las tablas de las tanjentes i cotanjentes. Célebre como astrónomo, pues habia descubierto las variaciones lunares, era ademas distinguido matemático.

Alhazen (987 - 1038) de Basora dió a luz una coleccion de problemas análogos a los *Data* de Euclides, unos comentarios de las definiciones del mismo autor i del Almagesto, i un libro de óptica, en el cual se ve por primera vez una esposicion científica de la refraccion atmosférica. Resuelve por medio de la jeometría diversas cuestiones, entre las que se encuentra la de fijar sobre un espejo cóncavo la posicion del punto de incidencia de un rayo de luz, conocidas la del punto luminoso i la del punto reflejado.

Abdalgel (1060 - 1110?) compuso un tratado de las secciones cónicas i tres opúsculos de jeometría.

Las Matemáticas siguieron siendo cultivadas por los árabes hasta el siglo XV, pero sin que produjeran ninguna obra que merezca una mencion especial. Los trabajos que hemos analizado manifiestan que sus autores eran de una intelijencia superior. Comprendieron la importancia de la jeometría i sus aplicaciones a la astronomía. Sin embargo, no hicieron progresos en estática, óptica ni hidrostática, no obstante el vasto conocimiento que poseian de la hidráulica aplicada.

La impresion jeneral que deja el estudio de su historia es que se asimilaron rápidamente las ideas de los griegos i de los hindúes, sin que hicieran notables adelantos en estos conocimientos. Sus escuelas florecieron durante 650 años; i la comparacion de sus trabajos de matemáticas con los de la Grecia i de la Europa moderna, los colocan en un rango inferior.