CÁLCULOS JEODÉSICOS

POR

ALBERTO OBRECHT

La jeodesia se ocupa de determinar la forma i las dimensiones de la superficie de la Tierra o, mas exactamente, de la superficie ideal normal, en cada punto, a la direccion de la vertical en este punto. Esta superficie se llama JEOIDE.

Las medidas directas ejecutadas en varias rejiones de la Tierra parecen indicar que el jeoïde tiene aproximadamente la forma de un elipsoïde de revolucion cuyo achatamiento es del órden de 1/300. A la verdad, una teoria reciente (*) de la figura de los cuerpos celestes asigna a éstos i a la Tierra una forma un poco distinta; sin embargo, si se considera un elipsoïde osculador, en cada punto de la superficie teórica, el eje ecuatorial i el achatamiento de éste tienen una variacion casi inapreciable, desde el pólo hasta el ecuador.

En consecuencia es lójico admitir que la rejion definida por las visuales jeodésicas que parten de un punto cualquiera de la Tierra es asimilable a una porcion de elipsoïde de

(*) Congreso Científico Pan Americano, 1908.—Figura de los cuerpos celestes por A. Obrecht.

revolucion. Pero la forma de este elipsoïde osculador no se conoce i el objeto de la jeodesia es precisamente de determinarla exactamente.

El método consiste en adoptar ciertas dimensiones aproximadas para deducir, en seguida, sus correcciones de la comparacion entre el cálculo i la observacion.

Se ha elejido aquí, como primera aproximacion, el elipsoïde calculado por Bessel; sus dimensiones son:

Semi diámetro ecuatorial $a = 6.377.397$ metros

$$\log a = 6{,}804.6435$$

Achatamiento $\epsilon = \dfrac{1}{299{,}15}$

$$\log \epsilon = 3{,}524.1110$$

Las fórmulas que se encuentran a continuacion son, por lo jeneral, mas sencillas que las usuales, a pesar de tener la aproximacion exijida en la jeodesia.

En varios cálculos es necesario determinar el seno o la tanjente de un ángulo pequeño, conocido el ángulo en segundos de arco o, vice-versa, determinar el ángulo, conocido su seno o su tanjente. En estos casos, es conveniente emplear la Tabla I, en la cual se encuentran los valores de

$$log \frac{x}{sen\ x} = S$$

$$log \frac{tg\ x}{x} = T$$

espresados en unidades de la sétima decimal, con el argumento *log x*; x es el ángulo espresado en segundos.

Es conveniente tambien sustituir, al seno o a la tanjente, sus cocientes por *sen* 1''. Se tiene entónces

$$log\ x - S = log\left(\frac{sen\ x}{sen\ 1''}\right)$$

$$log\left(\frac{sen\ x}{sen\ 1''}\right) + S = log\ x$$

Lo mismo para las tanjentes.

CAPITULO I

DESARROLLOS TEÓRICOS

Curvatura de las líneas jeodésicas del elipsoïde de revolucion

Sean a i b los semi ejes ecuatorial i polar de un elipsoïde de revolucion; M uno cualquiera de sus puntos; x, y, z las coordenadas de M respecto de un sistema de tres ejes rectangulares dirijidos, los dos primeros OX, OY, en el ecuador i OZ segun el eje de revolucion; $MN = N$ la gran normal i λ, μ, ν los cosenos directores de MN; se tienen las fórmulas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\mu}{\frac{y}{a^2}} = \frac{\nu}{\frac{z}{b^2}} = \frac{-1}{\frac{N}{a^1}}$$

De éstas se deduce

$$\frac{N^2}{a^4} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}$$

i tambien

$$x + \lambda N = o$$

$$y + \mu N = o$$

$$z + \nu N = -\frac{a^2 - b^2}{b^2} z$$

Sean, en el punto M, ds un cambio de lugar elemental cualquiera sobre el elipsoïde i α, β, γ los cosenos directores de ds; se tiene, segun las últimas relaciones,

$$\alpha + \lambda \frac{dN}{ds} + N \frac{d\lambda}{ds} = o$$

$$\beta + \mu \frac{dN}{ds} + N \frac{d\mu}{ds} = o$$

$$\gamma + \nu \frac{dN}{ds} + N \frac{d\nu}{ds} = -\frac{a^2 - b^2}{b^2} \gamma$$

Ahora, si ds es un elemento de una línea jeodésica, la normal principal en M coincide con MN i sus cosenos directores son λ, μ, ν. Sean entónces ξ, η, ζ los cosenos directores de la binormal, r i ρ los radios de curvatura i de torsion.

En los Tratados de Cálculo infinitesimal (*) se establecen las relaciones

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\xi}{\rho}$$

$$\frac{d\mu}{ds} = -\frac{\beta}{r} + \frac{\eta}{\rho}$$

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{\zeta}{\rho}$$

Luego, al combinar estas fórmulas con las anteriores, se deduce

$$\frac{N}{r} = 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\gamma^2$$

$$\frac{N}{\rho} = -\frac{a^2 - b^2}{b^2}\gamma\,\zeta$$

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{a^2 - b^2}{b^2}\gamma\,\nu$$

Estas ecuaciones definen la curvatura, la torsion i la variacion de la gran normal en los puntos de una línea jeodésica del elipsoïde de revolucion.

(*) Cálculo Inf. por A. Obrecht. Tomo III, páj. 11.

Se deduce tambien de la primera ecuacion

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{N}{r}\right) = 2\,\frac{a^2 - b^2}{b^2}\,\gamma\,\frac{\nu}{r} = -\frac{2}{r}\,\frac{dN}{ds}$$

Luego

$$\frac{1}{r}\,\frac{dr}{ds} = \frac{3}{N}\,\frac{dN}{ds}$$

O sea

$$\frac{r}{N^3} = C^{te}$$

Por consiguiente el cociente del radio de curvatura por el cubo de la gran normal queda constante en los puntos de una misma línea jeodésica del elipsoïde de revolucion.

Sean ahora ϕ la latitud jeodésica del punto M, es decir el ángulo de la normal en este punto con el ecuador; A el azimut de la línea jeodésica, en M; se tienen las fórmulas

$$\gamma = \cos\phi \cos A$$

$$\zeta = \cos\phi \,\mathrm{sen}\, A$$

$$\nu = -\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Sea, por otra parte, ϵ el achatamiento. Si se desprecia ϵ^2 se deduce, de la ecuacion de la elipse meridiana,

$$N = a\,(1 + \epsilon\,\mathrm{sen}^2\,\phi)$$

Luego, al mismo órden de aproximacion,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & r = a\,(1 + \epsilon\, sen^2\, \phi - 2\, \epsilon\, cos^2\, \phi\, cos^2\, A) \\ & \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{a}\, cos^2\, \phi\, sen\, 2\, A \\ & \frac{d\,r}{ds} = 3\, \epsilon\, sen\, 2\, \phi\, cos\, A \end{aligned}\right.$$

Diferencia entre un arco de línea jeodésica i su cuerda

Se considera, en el punto M, un sistema de tres ejes de coordenadas dirijidas segun la tanjente MX' a la línea jeodésica que pasa por este punto, la normal principal MY' i la binormal Mz'; sean, respecto de estos ejes, x' y', z' las coordenadas de un punto M' de la línea jeodésica i s el arco MM'; se tienen las siguientes fórmulas (*)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & x' = s - \frac{s^3}{6\,r^2} + \frac{s^4}{8\,r^3}\,\frac{d\,r}{ds} + \cdots \\ & y' = \frac{s^2}{2\,r} - \frac{s^3}{6\,r^2}\,\frac{d\,r}{ds} + \cdots \\ & z' = \frac{s^3}{6\,\rho\,r} + \cdots \end{aligned}\right.$$

Sea tambien c la cuerda MM'; se deduce de (2)

$$c^2 = s^2 - \frac{s^4}{12\,r^2} + \frac{s^5}{12\,r^3}\,\frac{d\,r}{ds} + \cdots$$

(*) Loc. cit, páj. 13.

Luego

$$c = s\left(1 - \frac{s^2}{24\,r^2} + \frac{s^3}{24\,r^3}\,\frac{d\,r}{ds} + \ldots\right)$$

O bien

$$c = 2\,r\,sen\,\frac{s}{2\,r} + \frac{s^4}{24\,r^3}\,\frac{d\,r}{ds} + \ldots$$

Segun las ecuaciones (1) i al órden de aproximacion de ϵ^2, el segundo término de c puede reemplazarse por

$$\frac{s^4}{8\,a^3}\,\epsilon\,sen\,2\,\phi\,cos\,A$$

Sea $\triangle$ el ángulo, espresado en grados, de las verticales de M i M'; el cálculo numérico da

$$\frac{s^4}{8\,a^3}\,\epsilon = 0,^{\text{mct}}000.25\,\triangle^4$$

En la práctica de la jeodesia, $\triangle$ queda siempre menor que 3 unidades, para este valor de $\triangle$ el término considerado es igual a *dos centímetros;* luego su valor es siempre despreciable i se puede escribir simplemente

$$c = 2\,r\,sen\,\frac{s}{2\,r}$$

Veamos ahora la precision con la cual es necesario calcular el radio de curvatura r. Se deduce de la fórmula anterior

$$s = 2\ r\ arc\ sen\ \frac{c}{2\ r} = c + \frac{c^3}{24\ r^2} + \cdots$$

Luego un error $\delta\ r$ sobre el radio de curvatura produce, sobre el arco, un error

$$\delta\ s = -\frac{c^3}{12\ r^3}\ \delta\ r$$

Sea, por ejemplo, $\delta r = a\ \epsilon$; se obtiene, en esta hipótesis,

$$\delta\ s = \triangle^3 \text{ centímetros}$$

Este valor de $\delta\ s$ es tambien despreciable en la práctica de la jeodesia; luego, a la superficie de la Tierra; *un arco de línea jeodésica, hasta de 300 kilómetros, puede reemplazarse por un arco de circunferencia cuyo radio tenga un valor aproximado del órden de $a\ \epsilon$; el error correspondiente es igual a $\triangle^3$ centímetros, siendo $\triangle$ el ángulo, espresado en grados, de las verticales en los dos estremos del arco.*

Azimutes de los puntos de una línea jeodésica

En el punto M, considerado mas arriba, la vertical es el eje My'. Sea κ el ángulo que forma el plano $y'MM'$ con $y'Mx'$; se tiene

$$\kappa = \frac{z'}{x'}$$

Luego, segun las fórmulas (2),

$$\kappa = \frac{s^2}{6\,\rho\,r} + \cdots$$

O bien, si se reemplazan r i ρ por sus valores (1),

$$\kappa = -\frac{\epsilon\, s^2}{6\,a^2} \cos^2 \phi \operatorname{sen} 2\,A + \ldots$$

El cálculo numérico da

$$\kappa = -\,0{,}''036\ \Delta^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 A$$

Este valor puede despreciarse en la práctica, luego, *a la superficie de la Tierra, un arco de línea jeodésica, hasta de 300 kilómetros, puede reemplazarse por la seccion plana del jeoïde definida por los dos estremos del arco i la vertical de uno cualquiera de ellos.*

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS JEODÉSICOS

Las tres cuerdas de un triángulo jeodésico definen un triángulo plano cuya forma queda invariable cuando se reemplaza el jeoïde por otra superficie cualquiera que pase por los tres vértices.

Si se considera, en particular, una esfera de radio arbitrario R, los tres arcos de líneas jeodésicas pueden reemplazarse por los arcos de círculos máximos correspondientes de la esfera R si la diferencia entre R i los radios de curvatura de las líneas jeodésicas es del órden de $a\,\epsilon$. Ahora, en un punto cualquiera situado en el interior del triángulo jeodésico, el radio de curvatura de una línea jeodésica de azimut A es

$$r = a\,(1 + \epsilon\, sen^2\, \phi - 2\,\epsilon\, cos^2\, \phi\, cos^2\, A)$$

$$= a\,(1 - \epsilon\, cos\, 2\, \phi - \epsilon\, cos^2\, \phi\, cos\, 2\, A)$$

Sea entónces

$$R = a\,(1 - \epsilon\, cos\, 2\, \phi)$$

Si se adopta este valor de R, los lados del triángulo jeodésico podrán reemplazarse por los correspondientes del triángulo esférico.

En cuanto a los ángulos diedros, sean C, C', C'' los tres vértices del triángulo i c, c', c'' las cuerdas correspondientes; en el triángulo de las cuerdas se tiene

$$c^2 = c'^2 + c''^2 - 2\, c'\, c''\, cos\, C$$

Sean, por otra parte, s, s', s'' los tres lados del triángulo jeodésico; x, x', x'' sus proyecciones sobre el plano tanjente al jeoïde en C; y', y'' las distancias de C', C'' a este plano; r', r'' los radios de curvatura de s', s'' en el punto C; se tienen las fórmulas

$$x' = s' - \frac{s'^3}{6\, r'^2} \qquad c' = s' - \frac{s'^3}{24\, r'^2} \qquad y' = \frac{s'^2}{2\, r'}$$

$$x' = s'' - \frac{s''^3}{6\, r''^2} \qquad c'' = s'' - \frac{s''^3}{24\, r''^2} \qquad y'' = \frac{s''^2}{2\, r''}$$

Sea tambien S el ángulo diedro, en C, del triángulo jeodésico, se tiene

$$x^2 = x'^2 + x''^2 - 2\,x'\,x''\cos S$$

$$c^2 = x^2 + (y' - y'')^2$$

Luego

$$\cos S = \cos C\left(1 + \frac{s'^2}{8\,r'^2} + \frac{s''^2}{8\,r''^2}\right) - \frac{s'\,s''}{4\,r'\,r''}$$

En el triángulo esférico de radio R el ángulo C queda el mismo i S se cambia en $S+\delta S$, luego

$$\cos(S + \delta S) = \cos C\left(1 + \frac{s'^2 + s''^2}{8\,R^2}\right) - \frac{s'\,s''}{4\,R^2}$$

Sean

$$r' = R + \delta r'$$

$$r'' = R + \delta r''$$

Se tendrá

$$sen\,S.\delta S = \frac{(s'^2\,\delta r' + s''^2\,\delta r'')\cos C - s'\,s''\,(\delta r' + \delta r'')}{4\,R^2}$$

Para avaluar el órden de magnitud de δS se puede suponer el triángulo equilateral; en esta hipótesis, se tiene

$$\delta S = -\frac{0{,}577\, s^2}{4 R^3}(\delta r' + \delta r'')$$

O bien, si se designan por A', A'' los azimutes de S', S'',

$$\delta S = \frac{0{,}577}{4} \frac{\epsilon s^2}{a^2} \cos^2 \phi \cos (A' + A'')$$

El cálculo numérico da

$$\delta S = 0,''03 \,\triangle^2 \cos^2 \phi \cos (A' + A'')$$

Se ve que este valor de δS es despreciable en la práctica; por consiguiente se puede sustituir al triángulo jeodésico, otro triángulo trazado sobre la esfera de radio R.

Teorema de Legendre

Cuando se conocen los tres ángulos de un triángulo jeodésico i uno de sus lados s, los otros dos lados se pueden calcular como los de un triángulo esférico de radio R. Por ejemplo, para el lado s', se tiene

$$\operatorname{sen} \frac{s'}{R} = \operatorname{sen} \frac{s}{R} \frac{\operatorname{sen} S'}{\operatorname{sen} S}$$

De aquí resulta

$$\frac{s'}{R} = \operatorname{arc\,sen} \left(\operatorname{sen} \frac{s}{R} \frac{\operatorname{sen} S'}{\operatorname{sen} S} \right)$$

$$= sen\ \frac{s}{R}\ \frac{sen\ S'}{sen\ S} + \frac{1}{6}\ sen^3\ \frac{s}{R}\ \frac{sen^3\ S'}{sen^3\ S} + \cdots$$

$$= \left(\frac{s}{R} - \frac{1}{6}\ \frac{s^3}{R^3}\right) \frac{sen\ S'}{sen\ S} + \frac{s^3}{6\ R^3}\ \frac{sen^3\ S'}{sen^3\ S} + \cdots$$

Por consiguiente

$$s' = s\ \frac{sen\ S'}{sen\ S} - \frac{s^3}{6\ R^2}\ \frac{sen\ S'}{sen\ S} \left(1 - \frac{sen^2\ S'}{sen^2\ S} \right) + \cdots$$

Se averigua que los términos no escritos son despreciables en la práctica.

Legendre tuvo la idea de poner

$$s' = s\ \frac{sen\ (S' - x)}{sen\ (S' - x)}$$

Entónces la incógnita x está definida por la ecuacion

$$\frac{sen\ (S' - x)}{sen\ (S' - x)} = \frac{sen\ S'}{sen\ S} - \frac{s^2}{6\ R^2}\ \frac{sen\ S'}{sen\ S} \left(1 - \frac{sen^2\ S'}{sen^2\ S} \right)$$

O bien

$$\frac{sen\ x}{sen\ (S - x)} = \frac{s^2}{6\ R^2}\ \frac{sen\ S'\ sen\ (S + S')}{sen^2\ S}$$

De aquí se deduce, con suficiente aproximacion,

$$x = \frac{S^2}{6\,\mathrm{R}^2}\ \frac{sen\ S'\ sen\ S''}{sen\ S}$$

Si T es el área del triángulo, se obtiene

$$x = \frac{1}{3} \frac{T}{R^2}$$

El cociente de T por R^2 es el exceso esférico del triángulo, luego *un triángulo esférico puede resolverse como un triángulo plano si se quita, a cada uno de los ángulos, la tercera parte del exceso esférico.*

Este es el *teorema de Legendre.*

Segun este teorema, el achatamiento del elipsoïde osculador influye únicamente sobre el valor del exceso esférico i se tiene

$$\tau = \frac{T}{R^2} = \frac{T}{a^2 (1 - \epsilon \cos 2 \phi)^2} = \frac{T}{a^2} + 2 \epsilon \frac{T}{a^2} \cos 2 \phi$$

El segundo término es jeneralmente despreciable; en efecto, en el caso de un triángulo equilátero de 111 kilómetros de lado, su valor alcanza solo

$$0,'' 18 \cos 2 \phi$$

lo que equivale a 0,''06 $\cos 2 \phi$ sobre cada ángulo.

En los cálculos numéricos se escribe

$$\tau = 2 \, T k$$

i el coeficiente k se espresa de tal modo que el producto $2 \, T k$ representa segundos de arco (Tabla II).

CAPITULO II

CONOCIDAS LAS COORDENADAS JEOGRÁFICAS DE DOS PUNTOS, DETERMINAR SU DISTANCIA I LOS AZIMUTES DEL ARCO DE UNION EN SUS DOS ESTREMOS.

Latitud reducida

Las coordenadas de los puntos de una elipse pueden espresarse por medio de las fórmulas

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \operatorname{sen} \theta$$

Sea ϕ el ángulo de la normal con el eje de las abcisas, se tiene

$$tg\, \phi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\, tg\, \theta$$

En el caso de la elipse meridiana del jeoïde φ representa la latitud jeográfica; se dice que θ es la *latitud reducida.*

Sea ϵ el achatamiento de la elipse; se tiene tambien

$$tg\, \phi = \frac{1}{1-\epsilon}\, tg\, \theta$$

$$tg\, \theta = (1-\epsilon)\, tg\, \phi$$

Estas dos fórmulas pueden reemplazarse por desarrollos en series. Para esto se parte de las relaciones

$$tg\ \beta = (1+x)\ tg\ \alpha$$

$$\beta = \alpha + \frac{x}{2+x}\ sen\ 2\ \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2+x}\right)^2 sen\ 4\ \alpha + \cdots$$

En el caso presente se tiene

$$\phi = \theta + \frac{\epsilon}{2-\epsilon}\ sen\ 2\ \theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{2-\epsilon}\right)^2 sen\ 4\ \theta + \cdots$$

$$\theta = \phi - \frac{\epsilon}{2-\epsilon}\ sen\ 2\ \phi + \frac{1}{2}\left(\frac{\quad}{2-\epsilon}\right) sen\ 4\ \phi + \cdots$$

Los términos no escritos no alcanzan a 0,''001 i son, por consiguiente, despreciables.

En el caso del elipsoïde de Bessel se tiene

$$log\left(\frac{\epsilon}{2-\epsilon}\right)'' = 2{,}538.2326$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{2-\epsilon}\right)^2 = 0,''2891$$

Distancia, en línea recta, de los dos puntos.

Sean ϕ, ϕ' las latitudes jeográficas de los dos puntos; l i l' sus lonjitudes. Se calculan, en primer lugar, las latitudes reducidas i se elijen tres ejes de coordenadas rectangulares de tal manera que OZ sea el eje de revolucion del jeoïde; ZOX el meridiano de uno de los puntos. Las coordenadas rectilíneas de los dos puntos son entónces

$$x = a \cos \theta \qquad x' = a \cos \theta' \cos (l' - l)$$

$$y = o \qquad y' = a \cos \theta' \operatorname{sen} (l' - l)$$

$$z = b \operatorname{sen} \theta \qquad z' = b \operatorname{sen} \theta'$$

Sea c su distancia en línea recta, se tiene

$$c^2 = a^2 \cos^2 \theta' + a^2 \cos^2 \theta - 2\, a^2 \cos \theta \cos \theta' \cos (l' - l)$$
$$+ b^2 (\operatorname{sen} \theta' - \operatorname{sen} \theta)^2$$

O bien, si e es la escentricidad de la elipse meridiana,

$$c^2 = a^2 \left\{ 2 - 2 \cos\theta \cos\theta' \cos (l' - l) - 4\, e^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta' + \theta}{2} \right\}$$

$$= 4\, a^2 \left\{ \cos^2 \frac{l' - l}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' - \theta}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{l' - l}{2} \cos^2 \frac{\theta' + \theta}{2} \right.$$

$$\left. - e^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta' + \theta}{2} \right\}$$

Se pone, en seguida

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \dfrac{\theta' - \theta}{2} \cos \dfrac{l' - l}{2} = \operatorname{sen} \dfrac{m}{2} \cos M \\[2ex] \operatorname{sen} \dfrac{l' - l}{2} \cos \dfrac{\theta' + \theta}{2} = \operatorname{sen} \dfrac{m}{2} \operatorname{sen} M \end{array} \right.$$

i se obtiene

$$c^2 = 4\,a^2\,sen^2\,\frac{m}{2}\left\{1 - e^2\cos^2 M\cos^2\frac{\theta' + \theta}{2}\,sec^2\,\frac{l' - l}{2}\right\}$$

Sea todavía

$$sen\,w = e\cos M\cos\frac{\theta' + \theta}{2}\,sec\,\frac{l' - l}{2}.$$

Se tiene

$$c = 2\,a\,sen\,\frac{m}{2}\cos w$$

Distancia de los dos puntos sobre el jeoïde

Se puede poner, en el valor de c,

$$a\cos w = r'$$

$$m = \frac{s'}{r'}$$

i se obtiene así

$$c = 2\,r'\,sen\,\frac{s'}{2\,r'}$$

Bajo esta forma se ve que c representa la cuerda de un arco s' en una circunferencia de radio r'. Este radio i el de curvatura del arco s difieren entre sí de una cantidad menor que $a \epsilon$; luego, *al órden de aproximacion de* $\triangle$ *3 centímetros*, se puede sustituir s a s' i se tiene simplemente.

$$s = a\, m \cos w$$

Azimutes del arco en sus dos estremos

Se ha demostrado que el arco de línea jeodésica que une los estremos de una visual jeodésica puede ser considerado como situado en el plano definido por estos estremos i la vertical de uno cualquiera de ellos; sean entónces σ la proyeccion de s sobre el horizonte de uno de los estremos i A el azimud de s en este punto; se tendrá

$$\sigma \operatorname{sen} A = y' - y$$

$$\sigma \cos A = -(x' - x) \operatorname{sen} \phi + (z' - z) \cos \phi$$

Estas fórmulas suponen que el azimut se cuenta a partir del meridiano Norte hácia el Este, desde 0° hasta 360°.

Si se reemplazan ahora las coordenadas rectilíneas por sus valores, se obtiene

$$\frac{\sigma}{a} \operatorname{sen} A = \cos\theta' \operatorname{sen} (l' - l)$$

$$\frac{\sigma}{a} \cos A = \operatorname{sen} \phi \,[\, \cos\theta - \cos\theta' \cos (l' - l)\,]$$

$$+ (1 - \epsilon) \cos \phi\, (\operatorname{sen} \theta' - \operatorname{sen} \theta)$$

De estas fórmulas se pueden deducir otras análogas para el azimut A' del arco en el otro estremo. Para esto se cambiará θ, ϕ, l en θ', ϕ' l' i vice-versa. Se averigua así que A' es aproximadamente igual a $180^o - A$. Se pone en consecuencia

$$A = B - \frac{\alpha}{2}$$

$$A' = 180^o + B + \frac{\alpha}{2}$$

i se tiene

$$\frac{\sigma}{a}\, sen \left(B - \frac{\alpha}{2} \right) = cos\, \theta'\, sen\, (l' - l)$$

$$\frac{\sigma}{a}\, sen \left(B + \frac{\alpha}{2} \right) = cos\, \theta\, sen\, (l' - l)$$

$$\frac{\sigma}{a}\, cos \left(B - \frac{\alpha}{2} \right) = sen\, \phi \left\{ cos\, \theta - cos\, \theta'\, cos\, (l' - l) \right\}$$

$$+ (1 - \epsilon)\, cos\, \phi\, (sen\, \theta' - sen\, \theta)$$

$$\frac{\sigma}{a}\, cos \left(B + \frac{\alpha}{2} \right) = sen\, \phi' \left\{ cos\, \theta\, cos\, (l' - l) - cos\, \theta' \right\}$$

$$+ (1 - \epsilon)\, cos\, \phi'\, (sen\, \theta' - sen\, \theta)$$

De las dos primeras se deduce

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\, \frac{\sigma}{a}\, sen\, \frac{\alpha}{2}\, cos\, B = (cos\, \theta - cos\, \theta')\, sen\, (l' - l) \\ \\ 2\, \frac{\sigma}{a}\, cos\, \frac{\alpha}{2}\, sen\, B = (cos\, \theta + cos\, \theta')\, sen\, (l' - l) \end{array} \right.$$

i de las dos últimas

$$2\frac{\sigma}{a}\cos\frac{a}{2}\cos B=\cos^2\frac{l'-l}{2}\left\{\begin{array}{l}(sen\,\phi+sen\,\phi')(\cos\theta-\cos\theta')\\ +(1-\epsilon)(\cos\phi+\cos\phi')(sen\,\theta'-sen\,\theta)\end{array}\right\}$$

$$+sen^2\frac{l'-l}{2}\left\{\begin{array}{l}-(sen\,\phi'-sen\,\phi)(\cos\theta+\cos\theta')\\ +(1-\epsilon)(\cos\phi+\cos\phi')(sen\,\theta'-sen\,\theta)\end{array}\right\}$$

O bien

$$2\frac{\sigma}{a}\cos\frac{a}{2}\cos B=2\cos^2\frac{l'-l}{2}\cos\frac{\phi'-\phi}{2}\cos\frac{\phi'-\phi}{2}\times$$

$$(\cos\theta-\cos\theta')\left(tg\frac{\phi'+\phi}{2}+\frac{1-\epsilon}{tg\frac{\theta'+\theta}{2}}\right)$$

$$+4\,sen^2\frac{l'-l}{2}\cos\frac{\phi'+\phi}{2}\cos\frac{\theta'+\theta}{2}\cos\frac{\phi'-\phi}{2}\cos\frac{\theta'-\theta}{2}\times$$

$$\left(-tg\frac{\phi'-\phi}{2}+(1-\epsilon)\,tg\frac{\theta'-\theta}{2}\right)$$

Se tiene ahora

$$tg\frac{\phi'+\phi}{2}+\frac{1-\epsilon}{tg\frac{\theta'+\theta}{2}}=\frac{2}{sen(\phi'+\phi)}-\frac{\epsilon}{2}\frac{(\phi'-\phi)^2}{tg\,\phi}+\ldots.$$

$$-tg\frac{\phi'-\phi}{2}+(1-\epsilon)\,tg\frac{\theta'-\theta}{2}=-\epsilon(\phi'-\phi)\cos^2\phi+\ldots..$$

i se puede escribir, en los términos en ϵ,

$$(\phi' - \phi)^2 + (l' - l)^2 \cos^2 \phi = \triangle^2$$

Entónces

$$(3)\quad 2\,\frac{\sigma}{a} \cos \frac{a}{2} \cos B = \frac{2 \cos^2 \dfrac{l'-l}{2} \cos \dfrac{\phi' - \phi}{2}}{sen\, \dfrac{\phi' + \phi}{2}} - (\cos \theta - \cos \theta')$$

$$- \epsilon (\phi' - \phi) \triangle^2 \cos^2 \phi$$

Al combinar (3) con (2) se obtiene

$$tg\, \frac{a}{2} = \frac{sen\, \dfrac{\phi' + \phi}{2}}{\cos \dfrac{\phi' - \phi}{2}}\, tg\, \frac{l' - l}{2}$$

$$tg\, B = \frac{\cos \dfrac{\theta' + \theta}{2} \cos \dfrac{\theta' - \theta}{2}\, sen\, \dfrac{\phi' + \phi}{2}\, tg\, \dfrac{l' - l}{2}}{sen\, \dfrac{\theta' - \theta}{2}\, sen\, \dfrac{\theta' + \theta}{2} \cos \dfrac{\phi' - \phi}{2} \left(1 - \dfrac{\epsilon \triangle^2}{2} \cos^2 \phi\right)}$$

O bien, segun (1),

$$tg\, B = tg\, M\, \frac{\cos \dfrac{\theta' - \theta}{2}}{\cos \dfrac{\phi' - \phi}{2}}\; \frac{sen\, \dfrac{\phi' + \phi}{2}}{sen\, \dfrac{\theta' + \theta}{2}} \left(1 + \frac{\epsilon \triangle^2}{2} \cos^2 \phi\right)$$

Ahora

$$\frac{\cos\frac{\theta'-\theta}{2}}{\cos\frac{\phi'-\phi}{2}} = 1 - \frac{\epsilon\Delta^2}{4}\cos^2 A\cos 2\phi + \ldots$$

$$\frac{sen\frac{\phi'+\phi}{2}}{sen\frac{\theta'+\theta}{2}} = 1 + \epsilon\cos^2\frac{\theta'+\theta}{2} - \frac{\epsilon\Delta^2}{2}\cos^2 A\cdot\cos^2\phi$$

$$+ \epsilon^2\cos^4\phi - \frac{\epsilon^2}{8}sen^2 2\phi + \ldots$$

Luego

$$tg\,B = tg\,M\left(\begin{array}{l}1+\epsilon\cos^2\frac{\theta'+\theta}{2}+\frac{\epsilon\Delta^2}{8}-\frac{\epsilon\Delta^2}{8}\cos 2A\\ -\frac{\epsilon\Delta}{4}\cos 2\phi\cos 2A+\epsilon^2\cos^4\phi-\frac{\epsilon^2}{8}sen^2 2\phi+\ldots\end{array}\right)$$

Sea

$$B = M + \eta$$

Se obtiene

$$\eta = \frac{\epsilon}{2}\cos^2\frac{\theta'+\theta}{2}sen\,2M\left(1+\epsilon\cos^2\phi\cos^2 A-\frac{\epsilon}{2}sen^2\phi\right)$$

$$+\frac{\epsilon\Delta^2}{16}\left(sen\,2A-\frac{1}{2}sen\,4A-\cos 2\phi\,sen\,4A\right)+\ldots$$

Se averigua que el término en $\epsilon\,\Delta^2$ es siempre desprecia-ble i se tiene, por otra parte

$$1 + \epsilon\, cos^2\, \phi\, cos^2\, A = sec\, w$$

Sea tambien

$$\epsilon\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\, sen^2\, \phi\right) = \epsilon'$$

Se tendrá finalmente

$$\eta = \epsilon'\, cos^2\, \frac{\theta' + \theta}{2}\, sen\, M\, cos\, M\, sec\, w$$

Los logaritmos de ϵ', en segundos de arco, se encuentran en la Tabla III.

RESÚMEN DE LAS FÓRMULAS

Sean ϕ, l i ϕ', l' las coordenadas jeográficas de los dos puntos i θ, θ' las latitudes reducidas correspondientes, e la escentricidad de la elipse meridiana i ϵ su achatamiento. Se pone

$$sen\, \frac{m}{2}\, cos\, M = sen\, \frac{\theta' - \theta}{2}\, cos\, \frac{l' - l}{2}$$

$$sen\, \frac{m}{2}\, sen\, M = sen\, \frac{l' - l}{2}\, cos\, \frac{\theta' + \theta}{2}$$

$$sen\, w = e\, cos \frac{\theta' + \theta}{2}\ cos\, M\ sec\ \frac{l' - l}{2}$$

$$log\ e = 2{,}912.25$$

$$\epsilon' = \epsilon\ (1 - \frac{\epsilon}{2}\ sen^2\ \phi) \qquad \text{(Tabla III)}$$

$$\eta = \epsilon'\ cos^2\ \frac{\theta' + \theta}{2}\ sen\ M\ cos\ M\ sec\ w$$

$$B = M + \eta$$

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ \frac{\phi' + \phi}{2}}{cos\ \frac{\phi' - \varphi}{2}}\ tg\ \frac{l' - l}{2}$$

La distancia s de los dos puntos es

$$s = a\, m\ cos\ w$$

i los azimutes A, A' del arco s, en sus dos estremos, son

$$A = B - \frac{\alpha}{2}$$

$$A' = 180^\circ + B + \frac{\alpha}{2}$$

La distancia s tiene una aproximacion de Δ^3 centímetros (Δ es el número de grados contenidos en el arco s) i los azimutes una aproximacion de 0,''01.

CAPITULO III

COORDENADAS JEOGRÁFICAS DE UN PUNTO REFERIDO A OTRO CONOCIDO POR SU DISTANCIA I SU AZIMUT

Se supone, en este Capítulo, que los dos puntos son los estremos de una visual jeodésica i se calculan las diferencias entre sus coordenadas con un grado de aproximacion equivalente al de las distancias mismas; en la práctica se adopta una aproximacion de un milésimo de segundo.

Desde luego se puede admitir que el arco de línea jeodésica que une los dos puntos se encuentra en el plano definido por esos puntos i la vertical de uno cualquiera de ellos. Sean σ la proyeccion del arco sobre el plano tanjente al jeoïde en el punto conocido i σ' la distancia del segundo punto a este plano tanjente; se tienen las fórmulas

$$x' - x = - \sigma \cos A \operatorname{sen} \phi - \sigma' \cos \phi$$

$$y' - y = \sigma \operatorname{sen} A$$

$$z' - z = \sigma \cos A \cos \phi - \sigma' \operatorname{sen} \phi$$

Luego, si se reemplazan las coordenadas rectilíneas por sus valores,

$$\cos \theta' \cos (l' - l) - \cos \theta = - \frac{\sigma}{a} \cos A \operatorname{sen} \phi - \frac{\sigma'}{a} \cos \phi$$

$$\cos \theta' \operatorname{sen} (l' - l) = \frac{\sigma}{a} \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} \theta' - \operatorname{sen} \theta = \frac{\sigma}{b} \cos A \cos \phi - \frac{\sigma'}{b} \operatorname{sen} \phi$$

La primera i tercera fórmulas dan la relacion

$$sen\ \theta'\ cos\ \theta - cos\ \theta'\ sen\ \theta\ cos\ (l' - l) =$$

$$\frac{\sigma}{a}\ cos\ A \left(\frac{a}{b}\ cos\ \theta\ cos\ \varphi + sen\ \theta\ sen\ \varphi\ \right)$$

$$- \frac{\sigma'}{a}\left(\frac{a}{b}\ sen\ \varphi\ cos\ \theta - cos\ \varphi\ sen\ \theta\right)$$

O bien, si se reemplaza $\frac{a}{b}$ por $\frac{tg\ \varphi}{tg\ \theta}$,

$$(1) \qquad sen\ (\theta' - \theta) - 2\ cos\ \theta'\ cos\ \theta\ sen^2\ \frac{l' - l}{2} = \frac{\sigma}{a}\ cos\ A\ \frac{sen\ \varphi}{sen\ \theta}$$

$$- \frac{\sigma'}{a}\ \frac{sen\ (\varphi - \theta)\ sen\ (\varphi + \theta)}{sen\ \theta\ cos\ \varphi}$$

Sea s el arco que une los dos puntos i r su radio de curvatura; se tiene, con suficiente aproximacion,

$$\sigma = s - \frac{s^3}{6\ r^2}$$

$$\sigma' = \frac{s^2}{2\ r}$$

Por consiguiente

$$\frac{\sigma}{a} = \frac{s}{a} - \frac{s^3}{6\ a\ r^2} = sen\ \frac{s}{a} + \frac{s^3}{6\ a^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

O bien, al reemplazar r por su valor,

$$\frac{\sigma}{a} = sen \frac{s}{a} + \frac{s^3 \epsilon}{3 a^3} (sen^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi \cos^2 A)$$

En el segundo miembro, el último término alcanza solo 0,"001 para una distancia de *cien* kilómetros i se puede prescindir de él. Luego se tiene simplemente

$$\frac{\sigma}{a} = sen \frac{s}{a}.$$

El término en σ' de la fórmula (1) es mui pequeño; sea δ su valor. Se tiene, con suficiente aproximacion,

$$\delta = - \frac{\epsilon s^2}{2 a^2} sen\, 2 \varphi$$

i se averigua que δ alcanza solo 0,"1 en el caso de una distancia de 100 kilómetros.

En resúmen las ecuaciones del problema son

$$\cos \theta' \, sen\, (l' - l) = sen \frac{s}{a} sen\, A$$

$$sen\, (\theta' - \theta) = sen \frac{s}{a} \cos A \frac{sen\, \phi}{sen\, \theta} - 2\, sen\, \theta \cos \theta' \, sen^2 \frac{l' - l}{2} \mp \delta$$

Las incógnitas son θ', l'.

Para determinar su valor en la práctica, se pone

$$sen\ u = sen\ \frac{s}{a}\ cos\ A\ \frac{sen\ \phi}{sen\ \theta}$$

i se tiene

$$(\theta' - \theta - u)\ cos\ \frac{\theta' - \theta + u}{2} = -\ 2\ sen\ \theta\ cos\ \theta'\ sen^2\ \frac{l' - l}{2} + \delta$$

Sea tambien

$$\gamma = -\ \frac{2\ sen\ \theta\ cos\ \theta'\ sen^2\ \dfrac{l' - l}{2}}{cos\ \dfrac{\theta' - \theta + u}{2}}$$

Se obtiene

$$\theta' = \theta + u + \gamma + \delta$$

En la espresion de γ figuran las incógnitas θ', l'; sin embargo se puede determinar su valor por aproximaciones sucesivas.

Se tiene, en primer lugar,

$$\gamma = -\ \frac{sen\,\theta\,sen^2\ \dfrac{s}{a}\ sen^2\ A}{2\ cos\ (\theta + u)\ cos\ u}\ \frac{cos\ (\theta + u)}{cos\ \theta'}\ \frac{cos\ u}{cos\ \dfrac{\theta' - \theta + u}{2}}\ \frac{1}{cos^2\ \dfrac{l' - l}{2}}$$

i un valor aproximado de γ es

$$\gamma_1 = -\frac{sen\ \theta\ sen^2\ \frac{s}{a}\ sen^2\ A}{2\ cos\ (\theta + u)\ cos\ u}$$

Sea, en seguida

$$\gamma = \gamma_1 (1 + k)$$

Se puede, en el valor de k, despreciar los términos en γ^2, i $\gamma_1\ u$ i se obtiene entónces

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_1\ cotg\ 2\ \phi$$

En toda la estension de Chile el término en γ_1^2, es despreciable si γ_1 es menor que 12".

Una vez conocido γ se tiene

$$sen\ (l' - l) = sen\ \frac{s}{a}\ \frac{sen\ A}{cos\ \theta'}$$

Finalmente el azimut A' del arco s, en el otro estremo, se deduce de A por medio de las fórmulas

$$A' = 180^o + A + \alpha$$

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ \frac{\phi' + \phi}{2}}{cos\ \frac{\phi' - \phi}{2}}\ tg\ \frac{l' - l}{2}$$

RESÚMEN DE LAS FÓRMULAS

Sean ϕ, l las coordenadas jeográficas de un punto dado s su distancia a otro punto i A el azimut de s.

Se calcula, en primer lugar, la latitud reducida θ que corresponde a ϕ i, en seguida, los ángulos

$$sen\ u = sen\ \frac{s}{a}\ cos\ A\ \frac{sen\ \phi}{sen\ \theta}$$

$$\gamma_1 = -\frac{sen\ \theta\ sen^2\ \frac{s}{a}\ sen^2\ A}{2\ cos\ (\theta + u)\ cos\ u}$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_1^2\ cotg\ 2\ \phi$$

$$\delta = -\frac{\epsilon\ s^2}{2\ a^2}\ sen\ 2\ \phi$$

Se tiene entónces

$$\theta' = \theta + u + \gamma + \delta$$

Conocido θ' se deduce la latitud jeográfica ϕ' del segundo punto.

La lonjitud l' se deduce de la fórmula

$$sen\ (l' - l) = sen\ \frac{s}{a}\ \frac{sen\ A}{cos\ \theta'}$$

i el azimut A' del arco, en el otro estremo, de las fórmulas

$$tg\,\frac{a}{2} = \frac{sen\,\frac{\phi' + \phi}{2}}{cos\,\frac{\phi' - \phi}{2}}\,tg\,\frac{l' - l}{2}$$

$$A' = 180^o + A + a$$

La aproximacion de ϕ', l' es de 0,"001, para una distancia s menor que cien kilómetros, i la de A' es 0,"01.

Cuando $l' - l$ es menor que 40 minutos, se tiene simplemente, con la misma aproximacion de 0,"01,

$$a = (l' - l)\,sec\,\frac{\phi' + \phi}{2}\,sec\,\frac{\phi' - \phi}{2}$$

Ademas el último factor puede reemplazarse por la unidad si $\phi' - \phi$ es menor que 20 minutos.