LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA VISTA DESDE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE CHILE

Jorge Soto Andrade

JORGE SOTO ANDRADE

Matemático, Profesor Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile, investigador asociado del Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile. Licenciado en Ciencias, Mención Matemáticas, de la Universidad de Chile (1967), Doctor de Tercer Ciclo en Matemáticas Puras de la Universidad de Estrasburgo (1970). Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Paris-Sud (1975), becario postdoctoral de la Fundación Alexander von Humboldt (1979-1980). Autor o coautor de medio centenar de artículos sobre diversos temas de matemáticas (teoría de representaciones de grupos y análisis armónico no conmutativo), biología sistémica (sistemas metabólicos y autoreferencia), didáctica de la matemática y ciencias cognitivas (metaforización y enacción en el aprendizaje de la matemática).

LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA VISTA DESDE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE CHILE

INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de la matemática y la formación de profesores de aula no eran parte de la misión de la Facultad de Ciencias cuando fue creada, contra el viento y la marea de las facultades profesionales de la Universidad de Chile, en 1965. Originalmente, su objetivo primordial era hacer ciencia fundamental y formar científicos; matemáticos en particular, que no eran formados en ningún lugar en Chile en ese entonces. Medio siglo más tarde, sin embargo, la Facultad forma profesores de educación media en conjunto con el Departamento de Estudios Pedagógicos de la Facultad de Filosofía y Humanidades y algunos de sus académicos investigan también en didáctica de la matemática y ciencias cognitivas, además de asumir un rol activo en formación inicial y continua de profesores de aula.

En lo que sigue, evocaremos los grandes rasgos de la historia de la formación de profesores de aula en la Universidad de Chile, comenzando con la formación de profesores primarios en las Escuelas Normales desde mediados del 1800 y de profesores secundarios en su Instituto Pedagógico desde 1889, hasta el presente, en las Facultades de Ciencias Sociales, de Filosofía y Humanidades y de Ciencias. Observaremos tanto los aspectos matemáticos como didácticos de los distintos avatares de esta formación desde nuestra perspectiva teórica en didáctica de la matemática. Reseñaremos finalmente las líneas de investigación en curso en didáctica de la matemática en nuestra facultad y redes de investigación asociadas.

LA FORMACION DOCENTE EN LAS ESCUELAS NORMALES Y EN LA UNIVERSIDAD DE CHILE

Formación de profesores primarios en las Escuelas Normales y en la Universidad de Chile

La formación inicial docente de profesores primarios comenzó en Chile con la fundación de la Escuela Normal de Preceptores en 1842, bajo el liderazgo del educador argentino Domingo Faustino Sarmiento (Avalos, 2004). Hacia fines del 1885 el gobierno contrató profesores alemanes y austríacos, como Julio Bergter, que en 1888 será director de la Escuela Normal de Preceptores de Santiago y Teresa Adametz y Guillermina Froemmel, directora y subdirectora de la Escuela Normal de Mujeres de Santiago, respectivamente, que impulsaron una reforma de los estudios y métodos de las escuelas normales (loc. cit.) siguiendo las ideas de Herbart (1804), pionero de la *Mathematikdidaktik* alemana, cuyo énfasis en las "maneras de ver", de visualizar o imaginar conceptos matemáticos remonta a Pestalozzi (1803). Las escuelas normales, que se beneficiaban desde 1912 de la difusión de las ideas de John Dewey en educación experiencial *("learning by doing")*, de un carácter más liberal y democrático y menos autoritario y prescriptivo que la escuela germana, jugaron un rol fundamental en la formación de profesores de primaria, adquiriendo progresivamente una calidad reconocible en aquellos egresados que aún enseñan en el sistema educacional.

El ingreso a ellas era muy selectivo y su condición de internado imprimía un sello pedagógico particular a sus estudiantes, quienes luego de egresar debían cumplir un servicio docente comunitario de siete años donde fuese necesario en el país. Contribuyeron fuertemente, en el 1900, a la movilidad social para los grupos medios y bajos (Avalos, 2004). Más tarde, durante el gobierno de Eduardo Frei Montalva (1964–1970), las escuelas normales adaptaron su formación de profesores a la nueva escuela básica de ocho años que reemplazó a la antigua escuela primaria, incluyendo la educación parvularia, ascendiendo a nivel terciario y recibiendo ahora también egresados de la educación secundaria, acercándose así al ideal de una escuela pedagógica única, con varios niveles (Avalos, 2004; Cox y Gysling, 1990). El gobierno militar, sin embargo, por razones esencialmente políticas, destruyó el normalismo, decretando el cierre de todas las escuelas normales, cuyos alumnos debieron emigrar a las universidades más cercanas. De esta manera, la Universidad de Chile, durante algunos años, formó profesores de educación general básica durante el gobierno militar –en condiciones poco favorables debido a las purgas políticas en vigor- hasta que en 1980 esta formación pasó fugazmente a las Academias Superiores de Ciencias Pedagógicas, para luego ser adjudicada en 1981 a la recién creada Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Solo en 2015, después de un hiato de 34 años, ha reasumido la Universidad de Chile su misión de formar profesores de educación general básica en la Facultad de Filosofía y Humanidades.

Formación de educadoras de párvulos en la Universidad de Chile

La formación inicial de educadoras de la infancia temprana (Educación Parvularia y Básica Inicial, hasta ocho años de edad) se inició en la Universidad de Chile en 2005, como culminación de un proyecto OEA conjunto con la Universidad de Barranquillas en Colombia y la de Kerétaro en México, liderado por parte de la Universidad de Chile por las profesoras Dina Alarcón y Alondra Díaz del Departamento de Educación de la Facultad de Ciencias Sociales. Esta pionera iniciativa contó con la colaboración de investigadores de la Facultad de Ciencias, pues una idea clave y rupturista de este proyecto fue que la formación científica de estas futuras educadoras debería ser asumida por científicos activos. En particular, la malla de estudios contemplaba al inicio de la carrera un curso anual de conocimiento matemático, cuyo diseño estuvo a cargo de Grecia Gálvez (artífice del programa de las 900 escuelas, en básica) y el autor de este artículo por parte de la Facultad de Ciencias. Esta interesante iniciativa ha sido discontinuada al día de hoy por la Facultad de Ciencias Sociales, principalmente debido a lo incierto que parece ser el mercado laboral para esta carrera, comparado con aquel de las carreras de Parvularia, por un lado, y de Profesora de Educación General Básica por otro. Actualmente la Facultad de Ciencias Sociales continúa formando solo profesoras (es) de Educación Parvularia.

La formación de profesores secundarios en el Instituto Pedagógico

Por otra parte, la profesionalización de la enseñanza de la matemática a nivel secundario y superior se inició en Chile en 1889 con la fundación del Instituto Pedagógico, donde durante varias décadas se formaron profesores de aula en secundaria con un alto nivel de exigencia bajo la égida de los didactas alemanes Richard Poenisch y August Tafelmacher, y desde 1929 también del distinguido matemático germano Karl Grandjot[11] (Gutiérrez & Gutiérrez, 2004, 2014). Cabe notar que sus contratos precisaban que debían dedicarse exclusivamente a la docencia. No era entonces su rol formar investigadores ni escuelas científicas, sino profesores secundarios, cometido que cumplieron a cabalidad, con germana prolijidad.

Aspectos didácticos de la formación de profesores secundarios en matemáticas en el Instituto Pedagógico

Desde un punto didáctico es de notar que la formación impartida a los futuros profesores secundarios desde 1890 en adelante incluía tópicos matemáticos bastante avanzados para la época, como cálculo infinitesimal y curvatura, ya que

11 Quienes adoptaron los nombres de Ricardo, Augusto y Carlos, respectivamente, al inmigrar a Chile.

"hay que saber más de lo que se va a enseñar" (Gutiérrez, 2007). Esta postura puede parecer razonable, pero favorece el descuido de la comprensión profunda de la matemática elemental en el sentido de Liping Ma (2010), así como del rol clave de la metaforización (Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade, 2014) y la enacción (Bruner, 1966; Varela et al., 1991) en el aprendizaje de la matemática. Este descuido conduce a confundir la enseñanza de la matemática con la catequesis, como se observa hasta el día de hoy en la mayoría de las aulas chilenas.

Es relevante notar que sin embargo la importancia de la metaforización en el aprendizaje de la matemática había sido claramente percibida por la didáctica de la matemática alemana *(Mathematikdidaktik)* para la escuela primaria, ya desde Pestalozzi (1803) y Herbart (1804), continuando con Kühnel (1920), Oehl (1967) hasta llegar a vom Hofe (1995) y Padberg (2009). En la *Mathematikdidaktik* se utilizaban los términos *Anschauung* (visión o manera de ver) y *Vorstellung* (manera de representarse o concebir para sí un objeto o noción matemática) e incluso *Grundvorstellung*, esto es, una "*Vorstellung*" fundamental (vom Hofe, 1995). Así, por ejemplo, se decía que una *Grundvorstellung* para la resta es quitar, otra es retroceder, cuando nosotros las llamaríamos metáforas (vom Hofe, 1995; Soto-Andrade & Reyes-Santander, 2011; Soto-Andrade, 2014). Esta perspectiva fue solo bastante más tarde transferida a la didáctica de la matemática para la escuela secundaria por Griesel (1971) y de modo aún bastante prescriptivo (vom Hofe, 1995), de modo que los formadores alemanes de profesores secundarios chilenos (Poenisch, Tafelmacher, Grandjot) permanecieron ajenos a ella, contrariamente a los didactas alemanes de la primaria. Notar que la palabra metáfora (Metapher) es poco usada en *Mathematikdidakik* y tiene un sentido más bien solo retórico.

En descargo de Poenisch y Tafelmacher habría que citar, sin embargo, alguno de sus textos de consejos metodológicos para la secundaria, como "Sobre los métodos para la enseñanza de las matemáticas en los liceos" de Tafelmacher (1893), una reproducción de las ideas de Reidt (1886) según señala modestamente el autor, donde se ejemplifican seis métodos de enseñanza organizados en tres parejas dicotómicas, a saber: docente – heurístico, sintético – analítico y euclidiano (dogmático) - jenético (en la ortografía de la época, bastante más racional que la actual).

El método docente, llamado "frontal" hoy en día, consiste en que el profesor expone, los alumnos anotan y luego recitan. Este método es criticado por Tafelmayer (loc. cit.). El método heurístico, como su nombre lo indica, apunta a que los alumnos vayan descubriendo por sí mismos los contenidos matemáticos relevantes, guiados por secuencias de preguntas cuidadosamente organizadas por el profesor.

La siguiente dicotomía es transversal a la anterior y se refiere esencialmente al tratamiento de las demostraciones: en el método sintético se presenta un teorema y su demostración para que los alumnos la aprendan y reciten de memoria. En el método analítico el profesor configura diestramente secuencias de preguntas para ayudar a todos los alumnos a reconstruir la demostración que él tiene en mente en lugar de recibirla cual encomienda “desde el Olimpo”. Se espera que así el alumno aprenda el “arte de demostrar” mediante un *análisis* de la demostración que se le hace descubrir, en lugar de memorizarla “en bloque”, sintéticamente.

La dicotomía *euclidiano* (*dogmático) - jenético* se refiere a la concatenación de propiedades, teoremas y demostraciones matemáticas. Aquí “dogmático” es en realidad una metáfora teológica de “axiomático” (los axiomas son los dogmas de la matemática, o bien, los dogmas son los axiomas de la teología). “Euclidiano” alude aquí al ejemplo clásico de concatenación de las proposiciones en los elementos de Euclides, que se vuelve tradicional y prefijado. No es necesariamente el más natural, ya que puede ser bastante artificioso y los alumnos deben memorizarlo etapa por etapa para no caer en círculos viciosos. El método “jenético”, por el contrario, consiste en presentar una concatenación más “natural”, que corresponde a una matemática que “crece” orgánicamente. Para precisar esta intuición válida, aunque algo imprecisa, Tafelmacher cita la demostración dogmática de la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo que se basa en la congruencia de los dos triángulos definidos por la diagonal, algo poco “natural”, en lugar de proceder “jenéticamente”, en forma más “natural”, sacando partido del paralelismo de los lados del paralelogramo. Tafelmacher evoca una “conexión genética” entre propiedades o teoremas matemáticos y propone agrupar estos siguiendo una lógica natural.

Otro ejemplo ilustrativo considerado en nuestra investigación en didáctica de la matemática (Soto-Andrade et al., 2012, Soto-Andrade, 2014) es el de los ángulos exteriores de un polígono y sus propiedades, por ejemplo, el valor de su suma. El método dogmático para obtener el valor de dicha suma (o, más prescriptivamente, demostrar que vale un ángulo completo) utilizado por la gran mayoría de nuestros profesores secundarios es expresar los ángulos exteriores en función de los interiores, la suma de los ángulos exteriores en términos de la suma de los ángulos interiores, calcular la suma de estos últimos por triangulación, por ejemplo, obteniendo un resultado que depende del número de lados del polígono considerado, reemplazar en seguida este valor en la suma de los ángulos exteriores para obtener en fin de cuentas ¡un ángulo completo, valor que no depende del número de lados del polígono! Es este un buen ejemplo de concatenación que es en realidad “contra natura”, dogmática y no “jenética”, en la nomenclatura de Reidt y Tafelmacher. Un punto de vista “jenético” aquí sería notar que los ángulos exteriores son en realidad más naturales que los interiores, en muchos contextos, y calcular directamente con los primeros, sin pasar por los segundos.

Según nuestra perspectiva de la metaforización enactiva en didáctica de la matemática, sin embargo, aquí está en juego mucho más que un simple reordenamiento de las concatenación de las propiedades de los objetos matemáticos: se trata de un cambio de actitud cognitiva y epistémica. En efecto, *yo* puedo (en primera persona) metaforizar enactivamente un polígono (sea convexo o no) como una trayectoria, un camino cerrado, formado de segmentos rectos, que *yo* recorro. Al hacer esto me percato de que los datos relevantes para *comunicar* mi trayectoria a algún interlocutor son: a partir de una posición y dirección inicial dadas, cuántos pasos camino en línea recta. Antes de detenerme, en que ángulo inflexiono la dirección en que voy antes de continuar caminando, etc. Notar que el ángulo de inflexión es justamente un "ángulo exterior" y que el respectivo ángulo interior es un dato sumamente poco práctico para un caminante que quiera reproducir mi trayectoria. Al momento de completar el recorrido poligonal cerrado y volver al punto de partida con mi nariz apuntando en la misma dirección que al comienzo, ¡habré en realidad sumado todos los ángulos exteriores de mi trayectoria al mismo tiempo que mi dirección de caminata dio un giro completo! Notar que supusimos implícitamente que se trataba de un polígono convexo, pero si no fuera el caso, nuestra metaforización enactiva muestra claramente cómo generalizar la propiedad que acabamos de establecer.

Cabe notar que nuestra metaforización enactiva del polígono es más que un simple modelo visual mental de un sujeto cognitivo pasivo (*Anschauung*) al estilo de Herbart (1804); para un didacta de la matemática escolar primaria alemana como Kühnel (1916) aparecería como una "noción representativa" (*Stellvertretervorstellung*), mediadora entre la experiencia individual concreta y la noción abstracta, o más tarde, como una de las "nociones fundamentales" (*Grundvorstellungen*) introducidas por Oehl (1967). Estas perspectivas didácticas (Soto-Andrade & Reyes – Santander, 2011) permanecen, sin embargo, ajenas a didactas de la matemática escolar secundaria como Poenisch, Tafelmacher y Reidt, a pesar de las intuiciones de estos últimos sobre la existencia de un método "jenético" para la enseñanza de la matemática en el liceo.

Aunque Tafelmacher recomienda enseñar según el método *heurístico-analítico-jenético* como regla general aunque no inviolable, pues han de tenerse en cuenta las circunstancias, cabe señalar que incluso cuando ejemplifica el método heurístico lo hace de manera sumamente prescriptiva y dirigida: el profesor logra que los alumnos redescubran un camino didáctico prefijado gracias a una cadena de preguntas hábilmente construidas, que no dejan, sin embargo, espacio para una exploración libre y lúdica de situaciones problemáticas ni para "paseos al azar" en lo cognitivo, ingredientes clave de un verdadero aprendizaje.

Retrospectivamente, podemos apreciar que el estilo de presentación de los contenidos matemáticos desarrollado por Poenisch y Tafelmacher, típico de un *Gymnasium* (escuela secundaria de elite) alemán, es matemáticamente riguroso pero bastante árido, sin contextualización, ni motivación, ni conexiones con otras áreas de la cultura humana. Las aplicaciones quedan para cursos de física o cosmografía. La matemática aparece así como una entelequia y un juego esotérico, seguramente poco motivador para la mayoría de los alumnos chilenos conducido por un *"Magister Ludi"* (el profesor). Se observa aquí una adherencia implícita a la metáfora que ve a la matemática como un edificio impecable, en que cada piso reposa sobre el anterior y el todo, sobre los fundamentos. Ignora los atajos y las conexiones inesperadas y es transversal a la metáfora que ve a la matemática como una jungla multidimensional que la humanidad ha explorado muy parcialmente, al azar, hasta ahora. Estamos así en las antípodas del aforismo que dice que "enseñar es el arte de cortocircuitar los pre-requisitos".

Formación de profesores de enseñanza media en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Filosofía y Humanidades

Relación entre el Instituto Pedagógico y la Facultad de Ciencias

La relación entre la joven Facultad de Ciencias, fundada en 1965, y el antiguo Instituto Pedagógico, creado en 1889, fue muy tenue hasta 1974, fecha en que el régimen militar, como primera etapa institucional de su plan de desmantelamiento del Instituto Pedagógico, junto con llevar a cabo un programa sistemático de purgas políticas, adscribió por decreto las carreras de pedagogía en media en Matemáticas, Física, Química y Biología, a la Facultad de Ciencias. Esta situación duró hasta 1980, cuando estas carreras le fueron amputadas a la Universidad de Chile, junto con las carreras de pedagogía en básica para, ulteriormente, en 1981, encomendarlas a la recientemente creada Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, presunta sucesora del Instituto Pedagógico, luego de una fugaz institucionalización extra-universitaria en una Academia Superior de Ciencias Pedagógicas de Santiago.

La Facultad de Ciencias y el Instituto Pedagógico fueron, hasta 1974, de hecho, mundos aparte, con misiones distintas y equipos de profesores prácticamente disjuntos, con la sola excepción, en el ámbito de la matemática, de César Abuauad, quien se integró ya en la década del setenta al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, donde colaboró abnegada y eficazmente, siendo incluso su director en los años ochenta.

Formación de profesores en la Facultad de Ciencias y la Facultad de Filosofía y Humanidades (1984 al presente)

En 1984 el Departamento de Estudios Pedagógicos (DEP) de la Facultad de Filosofía y Humanidades comenzó a ofrecer un programa para obtener el título profesional de Profesor de Estado de Enseñanza Media a detentores de una licenciatura o un título profesional universitario luego de completar una formación complementaria de dos años. En el caso de la matemática, el principal contingente de alumnos para este programa provino de la Licenciatura en Ciencias, mención Matemáticas, de la Facultad de Ciencias. De esta manera se formó un número pequeño (dos o tres egresados por año), pero altamente cualificado de profesores de educación media.

En 2005, después de una ardua labor, se logró reabrir en la Universidad de Chile la formación de profesores de Enseñanza Media en Física y Matemáticas (título doble) mediante un programa conducente primeramente a la Licenciatura en Ciencias Exactas y luego al Título de Profesor de Estado en Física y Matemáticas, administrado conjuntamente por los Departamentos de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias y el Departamento de Estudios Pedagógicos de la Facultad de Filosofía y Humanidades. Un ejemplo de colaboración fraternal e igualitaria entre científicos y educadores del que hay pocos en el mundo.

El desafío que plantea esta carrera es grande: ¿en qué medida se logra enseñar matemáticas a los futuros profesores como quisiéramos que ellos enseñen, a su vez, ulteriormente? No se trata solo de transmitir conceptos y conocimientos o saberes matemáticos. Si creemos eso, estaremos adhiriendo inconscientemente a la metáfora de la cañería o metáfora de transmisión, denunciada por educadores perspicaces (Sfard, 1998).

En la mayoría de los centros formadores de profesores se tiende a formar profesores que confunden la enseñanza de la matemática o de las ciencias con la catequesis. Basta observar lo que ocurre en la mayoría de las aulas chilenas y del mundo.

Nuestro objetivo es, por el contrario formar profesores de aula que sean capaces de visualizar y "ver lo invisible", metaforizar (mirar una cosa y ver otra), representar, modelizar, cooperar y jugar, no solo calcular mecánicamente en forma correcta y memorizar algoritmos.

La libertad de cátedra y una variedad de enfoques y perspectivas (metafóricas, enactivas, lúdicas) en un mismo curso pueden ser aquí de utilidad. Pero emergen así en el aula dinámicas complejas no fáciles de gestionar que suelen suscitar reacciones encontradas y marcadas divisiones entre los estudiantes, que se revelan en estos aspectos bastante más conservadores de lo que sería de esperar, visto su espíritu juvenil revolucionario.

La formación continua de profesores

Hemos tenido en Chile, durante estas últimas décadas, variados programas de formación continua de profesores en ejercicio (Programas de Perfeccionamiento Fundamental, Programas de Acompañamiento Curricular con Apoyo de

Universidades) con un impacto muy mitigado, con la excepción, notablemente, de los postítulos en Educación General Básica de la Universidad de Chile, que han tenido un efecto mucho más significativo, documentado en la literatura nacional e internacional (Soto-Andrade, 2009, 2010), y que contaban con becas de Mineduc para los profesores participantes. Sin embargo, a pesar de esto, durante el gobierno de Sebastián Piñera el programa de becas de apoyo a estos postítulos fue suspendido y hasta hoy no ha sido retomado. Al día de hoy en la Universidad de Chile se siguen ofreciendo postítulos en EGB con mención matemáticas que los profesores solventan con recursos propios o eventualmente de sus colegios.

La formación matemática de los futuros licenciados en ciencias

En la década del sesenta los alumnos de la primera generación de licenciados en ciencias, mención matemáticas, de la joven facultad, visitábamos excepcionalmente el Instituto Pedagógico para asistir a los cursos de "álgebra abstracta" de César Abuauad, justamente pionero de esa disciplina en Chile y discípulo de Grandjot (quien de hecho había escrito un tratado de álgebra abstracta en 1940 que tuvo nula acogida en el ambiente académico chileno, como era de temer). Durante esa década beneficiamos asimismo de la formación en lógica y metamatemática impartida por Rolando Chuaqui, también discípulo de Grandjot, a su retorno a Chile luego de doctorarse en lógica matemática con Tarski, en la Universidad de California, Berkeley. No tuvimos, sin embargo, mayor contacto con Grandjot mismo, quien estuvo académicamente activo en el Instituto Pedagógico hasta casi fines de la década del sesenta. Por lo demás, no era fácil en esos años encontrar en el ambiente académico docentes matemáticos suficientemente expertos para estas primeras generaciones de licenciados, que debían entonces adaptarse a los cursos ofrecidos al azar de las visitas de distinguidos matemáticos extranjeros: Teoría Ergódica con André Avez (Paris), Teoría de Categorías con Paul Dedecker (Bruselas), Topología Algebraica con Warren Ambrose (MIT), por citar algunos ejemplos, inimaginables en una formación de pregrado en matemáticas en el primer mundo en esos años.

En los años sesenta fueron, sin embargo, contratados para enseñar matemáticas en la Escuela de Física, fundada por Igor Saavedra, el Instituto de Ciencias y luego la Facultad de Ciencias, desde 1965, los matemáticos alemanes Arno Zaddach y Kurt Legrady, expertos en geometría finita y cálculo exterior y en geometría integral, respectivamente, y poco después el matemático polaco Olgierd Biberstein, experto en geometría diferencial. Todos de una gran cultura matemática, pero con estilos didácticos muy diferentes. El primero mucho más concreto y contextual, el segundo sumamente abstracto, en la más pura tradición de Bourbaki, y el tercero un muy elegante expositor de estilo francés, asumieron la mayor parte de la docencia matemática para los futuros licenciados en ciencias. Ulteriormente, una década después, Zaddach emigró a la sede Arica de la Universidad de Chile, Legrady retornó a Alemania y Biberstein se radicó en México.

Retrospectivamente, si nos interesamos en la enseñanza de la matemática para presuntos futuros matemáticos en lugar de futuros profesores de aula, es posible observar que el énfasis puesto por los profesores alemanes del Instituto Pedagógico, así como por sus discípulos inmediatos chilenos y los matemáticos extranjeros contratados ulteriormente (con la excepción de Arno Zaddach) en la exposición abstracta y axiomática de la matemática, no estimuló en absoluto la emergencia de matemáticos activos y creativos en Chile en esas décadas (con la quizás sola excepción notable de Rolando Chuaqui, médico de formación). Se formaron más bien "enamorados de la matemática", como se solía decir en esos tiempos, o espectadores de la matemática, pero no matemáticos. Para ello hubo que esperar el retorno progresivo, durante la década de los setenta, de la primera generación de licenciados que partieron al mundo matemáticamente desarrollado a hacer sus doctorados y descubrir experiencialmente lo que era la investigación en matemáticas. Otra década más tarde, en los ochenta, comenzaron a aparecer las primeras obras matemáticas realizadas por matemáticos chilenos en Chile, en particular algunas que portan internacionalmente el nombre de sus autores, como los famosos planos proyectivos finitos de Raúl Figueroa (*Figueroa's planes*), un tesista de Magíster de Óscar Barriga y Rolando Pomareda, de nuestro Departamento de Matemáticas (Figueroa, 1982, Hering & Schaeffer, 1982; Dempwolf, 1984; Grundhöfer, 1986; Cherowitzo, 1990, Nowlin Brown, 2006). Notar que los directores de tesis no fueron coautores del trabajo originado por la tesis (*noblesse oblige*). Fue este el primer hito en el lento despegue de la escuela matemática chilena en la década del ochenta, al que siguieron otros (Katz, 1993; Kable, 2002, Elias & Williamson, 2013, Xia et al, 2013; Chen & Unda, 2015).

INVESTIGACIONES ACTUALES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

Problemáticas, objetivos e hipótesis

Nuestra problemática es que la matemática resulte ser un instrumento de tortura para millones de niños indefensos en el mundo (más de tres millones en Chile). Los profesores de aula devienen agentes inconscientes o involuntarios de este abuso cognitivo, llamado también *"cognitive bullying"* desde hace poco en la literatura anglosajona (Watson, 2008; Johnston-Wilder & Lee, 2010). Son agentes inconscientes porque no "ven" el *bullying* cognitivo que infligen a sus alumnos (típicamente en Chile, profesores de enseñanza media haciendo docencia en 7º y 8º básico). Son agentes involuntarios porque están presionados por un sistema perverso, del que tampoco pueden escapar, que los fuerza a enseñar *para* los *tests* estandarizados.

Hacer *bullying* cognitivo a los alumnos significa ignorar o rechazar constantemente los modos propios de pensamiento de Estos, imponiéndoles la realización de tareas que no tienen sentido para ellos, en absoluto motivadoras, constantemente volviendo a repetir situaciones matemáticas que generan miedo o ansiedad y significan fracaso, exigiendo a los alumnos que se adecúen a métodos y significados que no entienden. (Watson 2008). Podemos conjeturar que los profesores de primaria alemanes herederos de Pestalozzi, Herbart o Kühnel serían mucho más sensibles para detectar el *bullying* cognitivo que sus homólogos de secundaria.

En nuestras aulas habitualmente los alumnos deben memorizar "respuestas lanzadas a sus cabezas como piedras", como dijo Paul Tillich (citado por Brown, 1971), sin haber tenido primero la oportunidad de hacerse las correspondientes preguntas (Cantoral, 2013; Freire, 2004, 2011) y de explorar lúdicamente diferentes senderos de aprendizaje (Whitebread & Basilio, 2013). Esta situación es especialmente crítica en las aulas chilenas, donde a pesar de un fuerte incremento del presupuesto para la educación y de las directrices de Mineduc, prevalecen el aprendizaje memorístico y un entrenamiento mecánico para los *tests* estandarizados, que no escatima costos humanos con tal de mejorar la performance en dichos *tests* (Espinoza, Barbé and Gálvez, 2009). Esta situación de abuso no deja espacio para la construcción del conocimiento por los alumnos mismos ni para la interacción cooperativa entre pares, que se correlaciona, sin embargo, no solo con un mejor aprendizaje de contenidos, sino que con el desarrollo de importantes habilidades cognitivas y sociales como la autoregulación, la creatividad y la capacidad de plantear y resolver problemas.

Nuestro diagnóstico es que la enseñanza tradicional violenta mecanismos cerebrales cognitivos instalados durante millones de años de evolución que sería necesario reconocer y valorizar en el contexto del aprendizaje.

Nuestro objetivo a largo plazo es democratizar, incluso humanizar, la matemática (Cantoral, 2013; Freire, 2011), poniendo al alcance de muchos aprendices conceptos o procesos matemáticos que serían de otro modo inaccesibles o esotéricos para ellos, logrando que la escuela devenga un medio ambiente cooperativo y enactivo donde el aprendizaje pueda emerger.

Nuestra hipótesis es que la práctica de la metaforización, particularmente de la metaforización enactiva, en el aula, es un medio fundamental para contribuir a liberar a los alumnos de esta situación de abuso cognitivo, fenómeno de suyo complejo. Para que los profesores puedan facilitar este proceso será necesario, sin embargo, que ellos mismos hayan hecho la experiencia – en carne y mente propia – de la práctica de la metaforización enactiva en el planteamiento y resolución de problemas, por ejemplo. Esto necesita programas de desarrollo profesional con una fuerte base experiencial que comprometan a toda la persona, no solo orientados al aprendizaje o reforzamiento de contenidos.

El trasfondo de investigación está constituido por estudiantes y participantes de variados tipos y niveles, a saber:

- Alumnos de Pedagogía en Física y Matemáticas, de enseñanza media, en la Universidad de Chile
- Estudiantes de primer año de Bachillerato de la Universidad de Chile, de orientación humanista
- Alumnos de educación básica (con el concurso de profesoras que realizan un postítulo en EGB con mención en matemáticas)
- Profesores de básica y media enrolados en programas de desarrollo profesional (postítulos y otros) en Santiago y regiones
- Alumnos de Licenciatura en Matemáticas
- Menores infractores del SENAME enrolados en un programa de reinserción social
- Participantes en escuelas de temporada y actividades de extensión organizadas por la Universidad de Chile y el Consejo Nacional de la Cultura y las Artes en regiones

La variedad de sujetos es importante, pues queremos aportar evidencia a favor del carácter universal de la metaforización enactiva y discernir los efectos didácticos comunes de ella en distintos tipos de aprendices (que incluyen tanto estudiantes como profesores en ejercicio con distintas formaciones, mayoritariamente involucrados en programas o actividades de desarrollo profesional).

METAFORIZACIÓN Y ENACCIÓN EN LA MATEMÁTICA Y SU APRENDIZAJE

Ha sido progresivamente aceptado estas últimas décadas (Araya et al., 2010; Chiu, 2000; English, 1997; Sfard, 1994, 2009; Soto-Andrade y Reyes-Santander, 2011; Soto-Andrade, 2014) que las metáforas conceptuales no son solo figuras o giros de lenguaje (tropos), sino que herramientas cognitivas potentes que permiten construir conceptos así como resolver problemas complejos en forma amigable y eficiente, favoreciendo la democratización de la matemática, además de ser un instrumento clave en la actividad creativa de un matemático profesional (Sfard, 1994, 2009; Manin 2010).

El paradigma enactivo (de Jaegher et al., 2010; Maturana and Varela, 1984; Varela et al., 1991) ve a la cognición fundada en la dinámica sensorimotriz de las interacciones entre un organismo viviente y su medio, esto es, del acoplamiento entre un organismo y el mundo. Así concebida, la cognición emerge de un cuerpo que está inmerso en un contexto biológico, psicológico y socio-cultural. Esta naturaleza emergente y situada de la cognición está descrita metafóricamente en los famosos versos de Antonio Machado: "Caminante, son tus huellas el camino y nada más; caminante, no hay camino, se hace camino al andar…" (Thompson, 2007; Malkemus, 2012). Varela mismo metaforizó la enacción como el trazar un camino al andar (Varela, 1987, p. 63).

La enacción en educación matemática remonta, sin embargo, a Bruner (1966), quien la introdujo como *"learning by doing"*. De hecho, describió la representación enactiva de un dominio o un objeto cognitivo como un conjunto de *acciones* apropiadas para alcanzar un cierto resultado, en contraste con la representación icónica donde se emplean *imágenes* o gráficos y la representación simbólica basada en *símbolos* y su sintaxis. Más tarde, las ideas de Bruner serían exitosamente implementadas y difundidas vía la metodología CPA de Singapur (*Concrete-Pictorial-Abstract*) o también el EIS Prinzip (*Enaktiv-Ikonisch-Symbolisch*) en Alemania o el COPISI (Concreto-Pictórico-Simbólico) en las nuevas bases curriculares chilenas. Desarrollos recientes en el campo de la educación enfatizan el rol del profesor como un practicante enactivo que actúa "en situación" y nos motivan a enfocarnos en las "maneras de ser" que pueden ser estimuladas y desarrolladas en el aula más bien que monitorear solamente el conocimiento matemático específico desarrollado (Masciotra et al., 2007; Proulx & Simmt, 2013, 2015). De hecho, se desarrolla hoy en día una perspectiva enactiva en educación (Brown & Coles, 2011, 2012; Brown, 2015) inspirada por la pionera teoría enactiva de la mente de Varela y Thompson (Varela et al., 1991; Thompson, 2007). Avances muy recientes suministran evidencia respecto a que abordajes radicalmente enactivos y corporizados a la cognición pueden ser exitosos para comprender y propiciar el aprendizaje de la matemática y que la enacción sensorimotriz en campos de acciones promocionadas da a luz los conceptos matemáticos (Abrahamson et al., 2015; Hutto et al., 2015).

En términos generales, la didáctica enactiva asigna un rol importante a gestos, movimientos y corporalidad en el aprendizaje (Novack et al, 2014; Libedinsky and Soto-Andrade, 2015; Liljedahl, 2015).

El ejemplo de la suma de los ángulos exteriores de un polígono mencionado más arriba ilustra el tipo de problemas que testeamos en aula con alumnos y profesores. Es importante notar que un problema de este tipo admite muy variados abordajes. Además de la metaforización enactiva ya descrita, el valor de la dicha suma salta a la vista si se metaforiza el polígono como un recinto entre varillas que se cruzan. ¡Al actuar alumnos o profesores esta metáfora con varillas concretas, ideas de manipulación pueden emerger en el colectivo que no son facilitadas por el lápiz y papel!

Investigamos actualmente en diseñar y testear secuencias didácticas que crecen en torno a una idea matemática fundamental, que llamamos *brotes de aprendizaje,* con alumnos y profesores de muy variados tipos. Por ejemplo, la idea fundamental de *forma* tiene como avatar polígonos, poliedros y polítopos. Análogamente, los paseos al azar son un avatar de la idea fundamental de *aleatoriedad* (*randomness*), que cruza, como un brote, desde la básica inicial hasta la enseñanza superior.

Una lista tentativa de ideas matemáticas fundamentales incluye nociones como aleatoriedad, simetría, forma, infinito y sistema. Nuestro punto de vista es que cada idea fundamental admite varios avatares (descensos, etimológicamente). Algunos dirán metáfora o modelo o incluso encarnación, en lugar de avatar.

Nuestra investigación se relaciona con STEM o mejor aún STEAM (incluyendo el Arte), pues nos interesamos en los contextos interdisciplinarios de aprendizaje, incluyendo la interfase matemáticas – arte que hemos comenzado a explorar en el marco de Escuelas de Temporada de la Universidad de Chile en colaboración con el Consejo Nacional de la Cultura y las Artes en regiones como la de Aysén, por ejemplo, abiertas a todo público, y también en jornadas dirigidas a profesores de arte y ciencia. En lo que a modelación se refiere, nuestra perspectiva lleva a poner a los alumnos *en situación* de interacción enactiva con un fenómeno, dejando espacio para que emerjan preguntas que llevarán a la búsqueda de un modelo, en lugar de proponer tareas predeterminadas. Por ejemplo: salir a tomar leche en una taza al sol, una situación que lleva eventualmente a modelar vía óptica geométrica, metaforizando "rayos" de luz.

En la Facultad de Ciencias tiene además su sede el Proyecto RIA-Domeyko sobre Redes Interactivas de Aprendizaje, que enfatiza enacción, metaforizacion, corporización y cooperación en relación con el aprendizaje. Colaboran matemáticos, didactas de la matemática y de las ciencias, lingüistas cognitivos, biólogos sistémicos, economistas, psicólogos, antropólogos, sociólogos, que son académicos de la Facultad de Ciencias y de la Facultad de Filosofía y Humanidades y otras universidades.

RESULTADOS

Hemos investigado las estrategias de cálculo mental desarrolladas idiosincrásicamente por alumnos de básica (Gálvez et al. 2011, Léger et al. 2014).

Nociones básicas (*Grundvorstellungen*) y metáforas han sido comparadas explícitamente en Soto-Andrade & Reyes-Santander (2011), como un caso de convergencia.

Hemos estudiado los procesos cognitivos de menores infractores en régimen de semilibertad, encontrando altos niveles de resiliencia y creatividad (Soto-Andrade & Reyes-Santander, 2012).

Hemos contribuido un artículo de referencia y reseña sobre Metáforas en Educación Matemática a la *Encyclopedia of Mathematics Education de Springer Verlag* (Soto-Andrade, 2014), además de realizar un estudio comparativo entre metáforas y *Grundvorstellungen* (nociones básicas) en didáctica de la matemática (Soto-Andrade & Reyes-Santander, 2011).

Hemos utilizado los caminos al azar como un "camino real" hacia el pensamiento estocástico (Soto-Andrade, 2013) y hemos desarrollado abordajes metafóricos enactivos a la aleatoriedad (Díaz-Rojas & Soto-Andrade, 2015).

Hemos realizado estudios de casos que ejemplifican el rol de la corporalidad, el afecto y la metaforización en la resolución de problemas (Libedinsky & Soto-Andrade, 2015).

REFERENCIAS

Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. In D. Reid, L. Brown, A. Coles, & M.-D. Lozano (Eds.), Enactivist methodology in mathematics education research, *ZDM, 47*(2), 295–306. doi: 10.1007/s11858-014-0620-0

Araya, R., Calfucura, P., Jiménez, A., Aguirre, C., Palavicino, M. A., Lacourly, N., Soto-Andrade J., & Dartnell, P. (2010). The effect of analogies on learning to solve algebraic equations. Pedagogies: An International Journal (NIE, Singapore), 5(3), 216 – 232.

Avalos, B. La formación inicial docente en Chile, Universidad de Barcelona, 2004

Brown, G. I. (1971) Human Teaching for Human Learning New York: Viking Press.

Brown, L. (2015), Researching as an enactivist mathematics education researcher, ZDM Mathematics Education (2015) 47:185–196

Brown, L. & Coles, A. (2011), 'Developing Expertise: How Enactivism Re-frames Mathematics Teacher Development'. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol 43., pp. 861 – 87

Brown, L & Coles, A (2012), 'Developing "deliberate analysis" for learning mathematics and for mathematics teacher education: how the enactive approach to cognition frames reflection'. Educational Studies in Mathematics, vol 80, pp. 217 – 231

Bruner, J. (1966). Toward a theory of instruction. Harvard, MA: Belknap Press of Harvard University Press.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Barcelona: Editorial Gedisa S.A.

Chen & Unda (2015), Diagramatic computation of morphism between Bobb-samelson bimodules via Libedinsky's light leaves, Research Sience Institute, MIT

Cherowitzo, W.E. Ovals in Figueroa Planes, J. of Geometry, 37: 84 - 86, 1990.

Chiu, M. (2000): Metaphorical Reasoning: Origins, Uses, Development and Interaction in Mathematics. Educational Journal, 28 (1), 13-46.

Cox, C. y Gysling, J. (1990). La Formación del Profesorado en Chile 1842-1987. Santiago: CIDE.

Dempwolff, U., A note on the Figueroa planes. Arch. Math.,43, pp. 285-289, 198

Díaz-Rojas, D. & Soto-Andrade, J., (2015). Enactive Methaporic Approaches to Randomness. To appear in Proceedings CERME 9, Prague, 2015.

Elias, B. & Williamson, G. (2013) Soergel Calculus, arXiv:1309.0865v1 [math.QA]

English, L. (ed.) (1997). Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images, London: Lawrence Erlbaum Associates.

Espinoza, L.,Barbé, J. & Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena, Enseñanza de las Ciencias, 27(2), 157–168.

Figueroa, R. A family of not (V, l) transitive projective planes of order q3 , q not congruent to 1 mod 3 and q > 2, *Math. Zeitschrift*, 181: 471-480, 1982.

Freire, P. (1993/2004). Cartas a quien pretende enseñar. (1a ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores S.A.

Freire, P. (1996/2011). Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa (2a ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores S.A.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., & Soto- Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 14 (1), pp. 9-40.

Griesel, H. (1971). *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie. Vol. 1*. Hannover: Schroedel Verlag.

Grundhöfer, T. (2004) A synthetic construction of the Figueroa planes. J. Geom. 26, pp. 191-201, 1986.

Gutiérrez, C., Gutiérrez, F. (2004). "Carlos Grandjot, Tres décadas de matemática en Chile (1930-1960)". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No. 1: 1 -30

Gtiérrez, C. y Gutiérrez, F. (2014) Ricardo Poenisch: la profesionalización de la enseñanza de las matemáticas en chile (1889-1930). *Atenea (Concepc.)* [online]. 2014, n.509 [citado 2015-06-10], pp. 187-209.

Gutiérrez, F. (2007). La formación de profesores en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile (1989 – 1950), *Obtenible en* www.picarte.cl/FormacionProfesores_20oct07.pdf

Herbart, J. F. (1804). Pestalozzi's Idee eines ABC der Anschauung. Göttingen.

Hering, C. and Schaeffer, H.-J. (1982). On the new projective planes of R. Figueroa. In Combinatorial Theory, volume 969 of Lecture Notes in Math. pp. 187-190. Berlin: Springer-Verlag.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akadem. Verlag.

Hutto, D., Kirchoff, M., & Abrahamson, D. (2015). The Enactive Roots of STEM: Rethinking Educational Design in Mathematics, submitted to Educational Psychology

De Jaegher, H. et al. 2010. Can social interaction constitute social cognition? Trends in Cognitive Sciences 14 (10), 441-447.

Johnston-Wilder, Sue and Lee, Clare (2010). Developing mathematical resilience. In: BERA Annual Conference 2010, 1-4 Sep 2010, University of Warwick.

Kable, A. (2002) Legendre sums, Soto-Andrade sums and Kloosterman sums, Pacific J. Math, 206, 129-157

Katz, N. (1993). Estimates for Soto-Andrade sums. *J. Reine Angew. Math.* 438: 143-161.

Kühnel, J. (1920). *Gedanken über Lehrerbildung, eine Gegenschrift*. Leipzig: Klinkhardt Verlag.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.

Léger, P., Gálvez, Inostroza, M., G., Cubillos, L., Luci, G., Tanter, E., Cosmelli, D., Soto-Andrade, J. (2014). "Ecocam, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 33-58.

Libedinsky, N., & Soto-Andrade, J. (2015). 'On the role of corporeality, affect and metaphoring in Problem solving', to appear in *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*, P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonen (Eds.), 10 p., Berlin: Springer-Verlag.

Liljedahl, P. (2015). Builiding thinking classrooms: conditions for problem solving, to appear in Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives, P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonen (Eds.), 10 p., Berlin: Springer-Verlag.

Ma, L. (2010), Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU, Santiago: Academia Chilena de Ciencias

Malle, G. & Malle S. (2003): Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematik lehren, 118*, 52-56.

Malkemus, S. A. (2012) Towards a general theory of enaction, The Journal of Transpersonal Psychology, 44(2), 201-223Manin, Yu (2007), Mathematics as Metaphor, Providence RI: American Mathematical Society

Masciotra, D., Roth, W.-M., & Morel, D. (2007). Enaction: Toward a Zen mind in learning and teaching. AW Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Maturana, H. y Varela, F. (1984). El árbol del conocimiento: las bases biológicas del entendimiento humano. Santiago: Editorial Universitaria.

Novack, M. et al. (2014). From action to abstraction: using the hands to learn math. Psychological Science, 1-8 [http://pss.sagepub.com/content/early/2014/02/05/0956797613518351,

Nowlin Brown, J.M. Non existence of certain Fano subplanes of Figueroa planes, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 12(5): 675-684, 2006.

Oehl, W. (1967). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule (fünftes bis achtes Schuljahr); didaktisch-methodische Überlegungen und Hinweise für die tägliche Unterrichtsarbeit.* Hannover: Schroedel Verlag.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung*, Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Pestalozzi, J.-H. (1803): Fabeln. 2. Auflage, Basel: Flick

Proulx, J. & Simmt, E. (2013). Enactivism in mathematics education: moving toward a re-conceptualization of learning and knowledge. Education Sciences & Society, 4 (1), 59-79.

Proulx, J. & Simmt, E. (2015). Enactivism and mathematics education: Sources, meanings, and research.Charlotte, NC: Information Age Publishing

Reidt, Fr. (1886) Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin: Grote

Reyes-Santander, P. & Soto-Andrade, J. (2011). Mathematisches Denken. Grundvorstellungen und Metaphern. En R. Haug y L Holzäpfel, *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2011, 2. Münster: WTM., 683-686. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/de/forschung/bzmu/bzmu2011.html

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor.*For the Learning of Mathematics, 141*, 44-54.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and on the dangers of choosing just one.*Educational Researcher, 27*(2), 4-13.

Sfard, A. (2009). Metaphors in education. In H. Daniels, H. Lauder & J. Porter (Eds.) Educational theories, cultures and learning: a critical perspective (pp. 39 – 50). London: Routledge.

Soto-Andrade, J.(2006) "Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 11, 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007) Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.). *Proceedings CERME* 5 Larnaca, Cyprus, (pp. 191-200). http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG1.pdf

Soto-Andrade, J. (2007) "La cognición hecha cuerpo florece en metáforas¨, in A. Ibáñez, & D. Cosmelli, (Editors), "*Nuevos Enfoques de la Cognición, Acción e Intención*", Ediciones Universidad Diego Portales, Santiago, Chile, pp. 71-90.

Soto-Andrade, J. (2009). ¿Formación continua o discreta de profesores?, en: *Formación Continua de Profesores*, C. Sotomayor, H. Walker (Eds.), Editorial Universitaria, Santiago, p. 285 - 297.

Soto-Andrade, J. (2010) "Cognitive transformation in professional development: some case studies", in *Proc. of CERME 6* (Sixth conference of the European Society for Research in Mathematics Education) (Lyon, 2009), 10 p. ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg10-23-soto-andrade.pdf

Soto-Andrade, J. & Reyes-Santander, P. (2011). Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen": a case of convergence? In: M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of CERME 7* (pp. 735-744), Rzészow, Poland: University of Rzészow.

Soto-Andrade, J., Reyes-Santander, P. and Parraguez, M. (2012). "Trois théories en action: APOS, Métaphores et Grundvorstellungen dialoguent autour d'un polygone…," communication au *Colloque en honneur de Michèle Artigue*, LDAR, Univ. Paris 7, mai-juin 1012. sites.google.com/site/colloqueartigue/atelier 2, pp. 16 – 19

Soto-Andrade, J. & Reyes-Santander, P. (2012) Mathematical Cognition in Juvenile Offenders : a Case Study, en *Proceedings ICME 12* (July 2012, Seoul, Korea), pp. 4721-4730.

Soto-Andrade, J. (2013). Metaphoric Random Walks: A Royal Road to Stochastic Thinking. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME 8*, Antalya, Turkey, pp. 890-900. http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG5/WG5_Soto_Andrade.pdf

Soto-Andrade J. (2014). Metaphors in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (www.springerreference.com), pp. 447-453, Berlin: Springer-Verlag.

Tafelmacher, A. (1893). "Sobre los métodos para la enseñanza de las matemáticas en los liceos". *Anales de la Universidad de Chile,* t. LXXXV, noviembre-abril.

Thompson, E. (2007). Mind in life: Biology, phenomenology, and the sciences of mind. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University.

Varela, F.J. (1987). Lying down a path in walking. In W.I. Thompson (Ed.). Gaia: A Way of Knowing, Hudson, NY: Lindisfarne Press, pp. 48-64.

Varela, F.J., Thompson, E., Rosch, E. (1991), The embodied mind: cognitive science and human experience, Cambridge, MA : The MIT Press.

Watson, Anne, (2008) 'Adolescent Learning and Secondary Mathematics', Plenary Lecture, in CMESG/GCEDM Proceedings, P. Liljedahl, S. Oesterlé, B. Bernèche (Eds.), pp. 21-29.

Whitebread, D. & Basilio, M. (2013). Play, culture and creativity. In D. Gauntlett & B. Stjerne-Thomsen (Eds.) *Cultures of Creativity*. Billund, Denmark: The LEGO Foundation.

Xia, Y-H, Chen, X, Romanovski, V.G. (2013). On the linearization theorem of Fenner and Pinto, J. Math. Anal. Appl. *400*(2), 439–451.