# CURSO DE CALCULO INFINITESIMAL

## O ANÁLISIS TRASCENDENTAL

*(Continuacion)*

**21.** En la práctica se seguirá, segun los casos, el modo de descomposicion que mas convenga a la fraccion que se trata de descomponer; lo importante es conocer, de antemano, la forma que deben tener las fracciones simples.

El modo que mas se debe recomendar es el siguiente:

1.º Cuando todas las raices de $f(x)=0$ son simples se escribe:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{L}{x-l}$$

Se multiplican los dos miembros por $f(x)$ i se hace sucesivamente $x=a$, $x=b$ etc. Es fácil ver que así se obtienen separadamente cada una de las constantes.

2.º El mismo método se emplea en caso de raices imajinarias; se tiene entónces

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \ldots\ldots + \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \ldots\ldots$$

Despues de la multiplicacion de los dos miembros por $f(x)$ se hace $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ i se igualan separadamente las partes reales i los coeficientes de $\sqrt{-1}$, se obtienen así dos ecuaciones que determinan $M$ i $N$.

3.° Cuando $f(x)=0$ tiene raices múltiples, por ejemplo, la raiz $a$ repetida $n$ veces, se escribe

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}$$

Se multiplican los dos miembros por $f(x)$ i se tiene

$$\phi(x)=A_n f_n(x)+A_{n-1}(x-a)f_n(x)+\ldots\ldots+$$
$$+A_1(x-a)^{n-1}f_n(x)+(x-a)^n\phi_n(x)$$

Se hace $x=a$ i se obtiene

$$\phi(a)=A_n f_n(a)$$

En seguida se toman las derivadas de los dos miembros i se hace de nuevo $x=a$, se obtiene

$$\phi'(a)=A_n f'_n(a)+A_{n-1}f_n(x)$$

Se deduce así $A_{n-1}$; se toma de la misma manera la segunda derivada para obtener $A_{n-2}$ i así en seguida.

El mismo procedimiento se aplica a las raices imajinarias múltiples.

**Ejemplo:** Se tiene la funcion racional

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{x^4+x^3-2x^2+3x-1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$$

Aplicando las reglas indicadas se escribirá:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

I multiplicando los dos miembros por $f(x)$ tendremos

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = A(x-1)^2(x^2+1) + Bx(x^2+1) + \\ Cx(x-1)(x^2+1) + (Mx+N)x(x-1)^2$$

Hagamos $x=0$ se tendrá $-1=A$ o bien $A=-1$

" $x=1$ " $2=2B$ " $B=1$

" $x=\sqrt{-1}$ $2+2\sqrt{-1}=2N+2M\sqrt{-1}$ $\begin{cases} M=1 \\ N=1 \end{cases}$

Para determinar $C$ se toman las derivadas de los dos miembros i se hace $x=1$ se obtiene así:

$$6=4B+2C$$

O bien

$$C=1$$

Finalmente:

$$\frac{x^4+x^3-2x^2+3x-1}{x(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

*Integracion de las fracciones simples*

22.—Estas fracciones, como se ha visto mas arriba, son de cuatro formas distintas; tendremos entónces las siguientes integrales

1.° $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int\frac{dx}{x-a} = A\,L(x-a)$$

2.° $$\int \frac{A}{(x-a)^p}\,dx = -\frac{A}{p-1}\;\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

3.° $$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx.$$

Para efectuar esta integracion, se hace

$$x-a=bz$$

$$dx=bdz$$

Luego

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx=\frac{Ma+N}{b}\int\frac{dz}{1+z^2}+M\int\frac{zdz}{1+z^2}=$$

$$=\frac{Ma+N}{b}\text{ arc tg } z+\frac{M}{2}L(1+z^2)$$

4.° $$\int\frac{M_p x+N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p}dx$$

Se hace tambien

$$x-a=bz$$

$$dx=bdz$$

Entónces, si se representa la integral buscada por $I$

$$I=\frac{M_p a+N_p}{b^{2p-1}}\int\frac{dz}{(z^2+1)^p}+\frac{M_p}{b^{2p-2}}\int\frac{zdz}{(z^2+1)^p}$$

Se tiene ahora

$$\int\frac{zdz}{(z^2+1)^p}=-\frac{1}{2(p-1)(z^2+1)^{p-1}}$$

Sea tambien

$$E_p=\int\frac{dz}{(z^2+1)^p}$$

Se puede escribir

$$E_p=\int\frac{(z^2+1-z^2)dz}{(z^2+1)^p}=E_{p-1}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^p}$$

Ahora, aplicando el procedimiento de integracion por partes:

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^p} = -\frac{z}{2(p-1)(z^2+1)^{p-1}} + \int \frac{dz}{2(p-1)(z^2+1)^{p-1}}$$

$$= -\frac{z}{2(p-1)(z^2+1)^{p-1}} + \frac{E_{p-1}}{2(p-1)}$$

Haciendo la sustitucion, tendremos

$$E_p = +\frac{z}{2(p-1)(z^2+1)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)}E_{p-1}$$

Esta fórmula de reduccion se podrá aplicar hasta espresar $E_p$ en funcion de $E_1$.

Se tiene ahora:

$$E_1 = \int \frac{dz}{z^2+1} = \text{arc } tg\, z$$

Luego se podrá obtener $E_p$

Aplicacion. — Se tiene:

$$\int \frac{x^4+x^3-2x^2+3x-1}{x(x-1)^2(x^2+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$

$$+\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

$$= -L\,x - \frac{1}{x-1} + L(x-1) + \frac{1}{2}L(x^2+1) + \text{arc } tg\, x.$$

$$= L\frac{(x-1)\sqrt{x^2+1}}{x} + \text{arc } tg\, x - \frac{1}{x-1}$$

*Integracion de algunas funciones irracionales*

**23.** — El método para averiguar si una funcion irracional es integrable consiste invariablemente en buscar si, por una sustitucion conveniente de la variable, se puede trasformar la espresion dada en otra que sea racional.

1.° Funcion racional de $x$ i de $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$.

Sea la integral

$$\int F\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) dx$$

Pongamos

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+h}} = z$$

Se deduce

$$\frac{ax+b}{cx+h} = z^m$$

$$x = \frac{hz^m - b}{a - cz^m}$$

$$dx = \frac{mz^{m-1}(ah - cb)}{(a - cz^m)^2} dz$$

Se ve que, si se reemplaza en la integral considerada, $x$ i $dx$ por estos valores se tendrá la integral de una funcion racional de $z$ que siempre se puede efectuar.

2.° Funcion racional de $x$ i de $\sqrt{a + bx + cx^2}$.

Sea

$$\int F\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$$

Para evitar la introduccion de las imajinarias en los cálculos, se distinguen tres casos:

1.^er^ *caso.* El coeficiente $a$ es positivo. Sea $a = \alpha^2$, se pone

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2} = \alpha + zx$$

Luego

$$a^2 + bx + cx^2 = a^2 + 2azx + z^2x^2$$

O bien, quitando $a^2$ i suprimiendo el factor comun $x$

$$x(c - z^2) = 2az - b$$

Se deduce de esta fórmula:

$$x = \frac{2az - b}{c - z^2}$$

$$dx = 2\frac{a + xz}{c - z^2}\,dz = 2\frac{ac + az^2 - bz}{(c - z^2)^2}\,dz$$

Haciendo la sustitucion en la integral propuesta se obtiene otra que es funcion racional de $z$, luego es integrable.

Ejemplo: Sea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

En este ejemplo $a$ es igual a 1, luego se pondrá

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + xz$$

I se obtiene

$$x = \frac{2z}{1 - z^2}$$

$$dx = 2\frac{1 + xz}{1 - z^2}\,dz$$

Haciendo la sustitucion se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = 2\int \frac{dz}{1 - z^2}$$

Ahora

$$\frac{2}{1 - z^2} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 + z}$$

Luego

$$2\int\frac{dz}{1-z^2}=\int\frac{dz}{1-z}+\int\frac{dz}{1+z}$$

$$=-L\,(1-z)+L\,(1+z)=L\,\frac{1+z}{1-z}$$

Finalmente, reemplazando $z$ por su valor en $x$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=L\,\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x^2}+1}=L\,(x+\sqrt{1+x^2})$$

2.º *caso.* — El coeficiente $c$ es positivo, sea $c=\gamma^2$. Se pone

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a+bx+\gamma^2x^2}=\gamma x+z$$

Luego

$$a+bx+\gamma^2x^2=\gamma^2\,x^2+2\,\gamma\,xz+z^2$$

Suprimiendo el término comun $\gamma^2x^2$, queda

$$x\,(b-2\gamma z)=z^2-a$$

Luego

$$x=\frac{z^2-a}{b-2\gamma z}$$

$$dx=2\frac{\gamma x+z}{b-x\gamma^2}dz=2\frac{bz-\gamma z^2-\gamma x}{(b-2\gamma z)^2}dz$$

La sustitucion en la integral propuesta da una funcion racional de $z$ que se puede integrar.

Ejemplo: Sea todavía la integral $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Aquí $c$ es igual a 1, de manera que se puede escribir

$$\sqrt{1+x^2}=x+z$$

Se obtiene así

$$x=\frac{1-z^2}{2z}$$

$$dx=-\frac{x+z}{z}dz$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{dz}{z}=-Lz=-L\,(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$=L(x+\sqrt{1+x^2})$$

3.° *caso.*—Si los dos coeficientes $a$ i $c$ son negativos puede suceder que las raices del polinomio del segundo grado igualado a cero sean reales; sean $\alpha$ i $\beta$ estas raices; se puede escribir

$$\sqrt{a+b\,x+cx^2}=\sqrt{c\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}$$

Se pone entónces

$$\sqrt{c\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=(x-\alpha)\,z$$

I se deduce

$$c\,(x-\beta)=(x-\alpha)\,z^2$$

Luego

$$x=\frac{c\,\beta-\alpha\,z^2}{c-z^2}$$

I

$$dx=\frac{2\,cz\,(\beta-\alpha)}{c-z^2}dz$$

La sustitucion de $x$ i $dx$ dará otra vez la integral de una funcion racional de $z$.

Aplicacion.—Sea la integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Las raices de $1-x^2=0$ son reales, se puede por consiguiente escribir

$$\sqrt{1-x^2}=(1+x)z$$

Luego

$$1-x=(1+x)z^2$$

$$x(1+z^2)=1-z^2$$

$$dx(1+z^2)=-2z(1+x)\,dz$$

Haciendo la sustitucion se tendrá

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=-2\operatorname{arc} tg\, z+C=$$

$$=-2\operatorname{arc} tg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=\operatorname{arc}\operatorname{sen} x+C'$$

4.º *caso.*—Si $a$ i $c$ son negativos i las raices imajinarias no se podrá evitar el empleo de las imajinarias, i esto es natural porque $\sqrt{a+bx+cx^2}$ es, en el caso considerado, una espresion imajinaria para todos los valores de $x$, la integral se obtendrá por uno cualquiera de los procedimientos indicados mas arriba i será naturalmente imajinaria.

*Integrales de las funciones racionales de líneas trigonométricas*

**24.**—Sea la integral.

$$\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

La funcion $F$ es por hipótesis una funcion racional de sen $x$ i cos $x$; el método jeneral para integrar consiste en poner:

$$tg\frac{x}{2}=z$$

Se tiene entónces:

$$\operatorname{sen} x=\frac{2z}{1+z^2}\qquad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$dx=2\frac{dz}{1+z^2}$$

Se ve que la sustitucion dará la integral de una funcion racional de $z$, integral que se puede obtener.

Este método conduce siempre al resultado, sin embargo los cálculos son a veces largos i complicados, de manera que en regla jeneral no se emplea sino cuando otros ensayos preliminarios no conducen a la integracion.

Así, si se pide la integral

$$I_m = \int \operatorname{sen}^m x \, dx$$

El método mas sencillo será de buscar una fórmula de reduccion; se escribirá

$$I_m = \int \sin^{m-2} x(1 - \cos^2 x) dx = I_{m-2} - \int \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

La integracion por partes da en seguida

$$\int \sin^{m-2} x \cos^2 dx = \frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m-1} + \int \frac{\sin^m x}{m-1} dx$$

Luego

$$I_m = I_{m-2} - \frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m-1} - \frac{I_m}{m-1}$$

O bien

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} - \frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m}$$

Esta fórmula aplicada sucesivamente conducirá finalmente a una de las dos integrales

$$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$I_0 = \int dx = x$$

**25.- Integracion de las diferenciales binomios.**

Son las integrales de la forma

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

Para hacer la integracion se hace

$$a+b\,x^n=z$$

i se averigua fácilmente que cuando $\frac{m+1}{n}$ es un número entero, la diferencial se trasforma en funcion racional de $z$ que se puede integrar.

Como la integral se puede escribir tambien

$$\int x^{m+np} (ax^{-n}+b)^p\, dx$$

Se ve que tambien se podrá integrar cuando $\frac{m+1}{n}+p$ es entero.

---

## CAPÍTULO VI

### APLICACIONES JEOMÉTRICAS

*De las tanjentes a las curvas*

**26.**—Sea, de una manera jeneral

$$F(x,y)=0$$

la ecuacion de una curva. Si $x$, $y$ son las coordenadas de uno de sus puntos i $X$, $Y$ los coordenadas variables la tanjente en el punto $x,y$ tendrá por ecuacion

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

Se obtiene $\frac{dy}{dx}$ por medio de la diferenciacion de la ecuacion de la curva

$$\frac{dF}{dx}\,dx+\frac{dF}{dy}\,dy=0$$

La ecuacion de la normal será

$$Y-y=-\frac{dx}{dy}\,(X-x)$$

**Ejemplo.**—*Tanjente a la elipse.*

Su ecuacion es

$$a^2\,y^2+b^2\,x^2=a^2\,b^2$$

Se deduce por diferenciacion

$$2\,a^2\,y\,dy+2\,b^2\,x\,dx=0$$

Luego

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2\,x}{a^2\,y}$$

I la ecuacion de la tanjente será

$$Y-y=-\frac{b^2\,x}{a^2 y}(X-x)$$

O bien

$$a^2\;Yy+b^2\;Xx=a^2\;b^2$$

Si la ecuacion de la curva se presenta bajo la forma

$$x=f\,(u)$$

$$y=\phi\,(u)$$

Se tiene

$$dx=f'\,(u)\;du$$

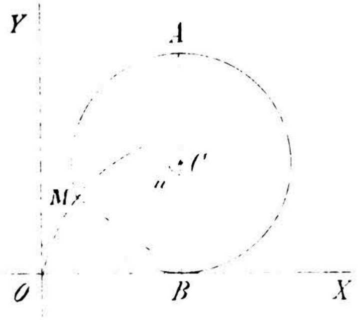
$$dy=\phi'\,(u)\;du$$

Luego

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\phi'\,(u)}{f'\,(u)}$$

**Ejemplo:** *Tanjente a la cicloide.*

La cicloide es la curva enjendrada por un punto de una circunferencia que rueda en su plano sobre una recta.




Sea $r$ el radio de la circunferencia, $OX$ la recta sobre la cual rueda, $M$ el punto que enjendra la cicloide i $O$ la posicion que tenia $M$ cuando el radio $CM$ era perpendicular a $OX$; se consideran como ejes de coordenadas la recta $OX$ i otra $OY$ perpendicular.

Sean $x$, $y$ las coordenadas de $M$ i $u$ el ángulo que hace el radio $CM$ con el radio $CB$ perpendicular a $OX$; la definicion misma de la curva permite espresar $x$ i $y$ en funcion del ángulo ausiliar $u$ i se tiene

$$x = r\,(u - \operatorname{sen} u)$$

$$y = r\,(1 - \cos u)$$

De estas dos ecuaciones se deduce

$$dx = r\,du\,(1 - \cos u)$$

$$dy = r\,du \operatorname{sen} u$$

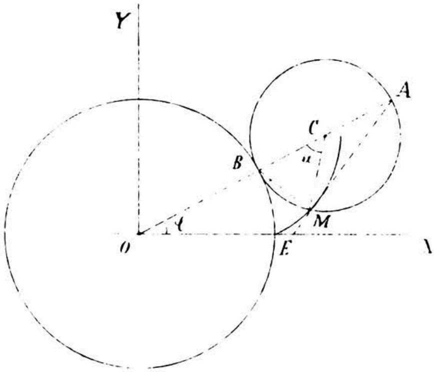
Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos u} = \cot g \frac{u}{2}$$

Esta fórmula nos muestra que la tanjente a la cicloide en el punto $M$ hace con el eje $OX$ un ángulo igual a $90^\circ - \frac{u}{2}$, luego la tanjente considerada pasa por el punto $A$, i la normal será la recta $MB$ que pasa por el punto de contacto de la circunferencia con $OX$.

*Tanjente a la epicicloide.*—Esta curva es la que describe un punto de una circunferencia que rueda en su plano sobre otra circunferencia.

Sean: $r$ el radio de la circunferencia móvil $C$; $R$ el de la circunferencia fija $O$; $E$ el punto de partida de la epiciloide; $M$ un punto de la curva cuando la circunferencia móvil es tanjente en $B$ a la circunferencia fija; se consideran dos ejes rectangulares de coordenadas uno $OX$ que pasa por el punto $E$, otro $OY$ perpendicular, el oríjen está en el centro de la circunferencia fija.




Se consideran dos ángulos auxiliares: uno $BCM=u$ que hace el radio $CM$ con $BC$, otro $BOX=\phi$ que hace la línea de los centros $OC'$ con $OX$.

Sean $x, y$ los coordenadas de $M$ se tendrá

$$x=(R+r)\cos\phi-r\cos(u+\phi)$$

$$y=(R+r)\operatorname{sen}\phi-r\operatorname{sen}(u+\phi)$$

Ahora la definicion misma de la curva muestra que

$$ru=R\phi$$

De las ecuaciones anteriores se deduce

$$dx=-(R+r)\operatorname{sen}\phi\, d\phi+r\operatorname{sen}(u+\phi)(du+d\phi)$$

$$dy=+(R+r)\cos\phi\, d\phi-r\cos(u+\phi)(du+d\phi)$$

$$r\,du=R\,d\phi$$

O bien

$$dx=(R+r)\,d\phi\left\{\operatorname{sen}(u+\phi)-\operatorname{sen}\phi\right\}$$

$$dy=(R+r)\,d\phi\left\{\cos\phi-\cos(u+\phi)\right\}$$

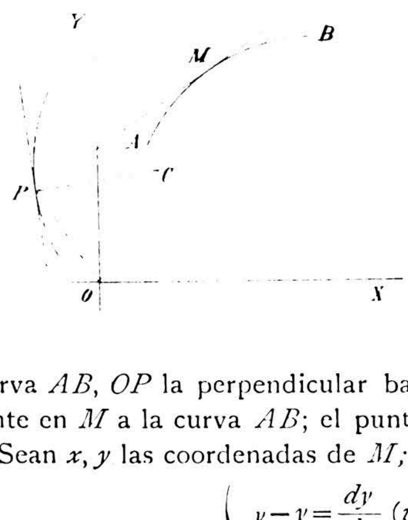
Luego

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\phi-\cos(u+\phi)}{\operatorname{sen}(u+\phi)-\operatorname{sen}\phi}=tg\left(\frac{u}{2}+\phi\right)$$

Así el ángulo que hace la tanjente en $M$ a la curva con el eje $OX$ es igual a $\frac{u}{2}+\phi$, por consiguiente esta tanjente pasará por el punto $A$, de encuentro de $OC$ con la circunferencia móvil; tambien la normal pasará por el punto de contacto $B$ de las dos circunferencias.

**Otro ejemplo:** Tanjente a la *podar* de una curva.

Sea $AB$ una curva plana cualquiera; por un punto $O$ se bajan perpendiculares sobre todas las tanjentes a esta curva i se llama podar de la curva $AB$ el lugar jeométrico de los piés de estas perpendiculares; el punto $O$ es el polo de la podar. Se trata de trazar la tanjente a este lugar jeométrico.




Sea $M$ un punto de la curva $AB$, $OP$ la perpendicular bajada desde $O$ sobre la tanjente en $M$ a la curva $AB$; el punto $P$ es un punto del podar.

Sean $x, y$ las coordenadas de $M$; $u$, $v$ las de $P$, se tiene

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} v-y&=\frac{dy}{dx}(u-x)\\ v&=-\frac{dx}{dy}u\end{aligned}\right.$$

La eliminacion de $x$ e $y$ entre estas dos ecuaciones i la de la curva $AB$, daria la ecuacion de la podar. Se quiere solamente determinar el valor de $\frac{dv}{du}$. De las dos ecuaciones (1) se deduce la siguiente:

$$v(v-y)=-u(u-x)$$

I, diferenciando

$$dv(2v-y)-vdy=-du(2u-x)+udx$$

Pero los dos términos $-\nu dy$, $udx$ se destruyen luego tendremos

$$d\nu\,(2\,\nu-y)=-du\,(2\,u-x)$$

O bien

$$\frac{d\nu}{du}=-\frac{u-\dfrac{x}{2}}{\nu-\dfrac{y}{2}}$$

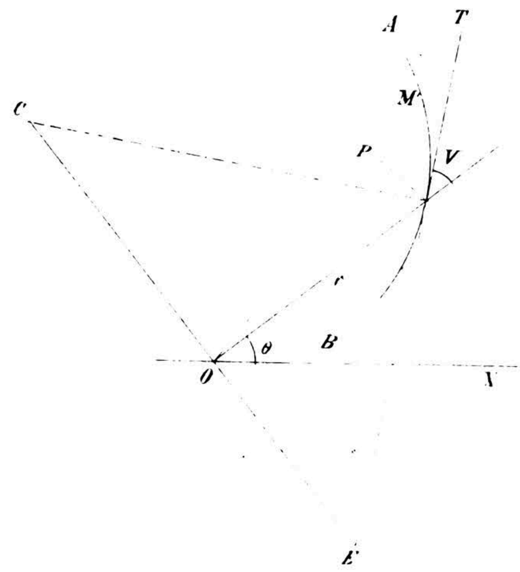
Sea $C$ el punto medio de $OM$, la recta $PC$ tiene por coeficiente angular

$$\frac{\nu-\dfrac{y}{2}}{u-\dfrac{x}{2}}$$

Luego la tanjente buscada es perpendicular a $PC$.

*Tanjentes a las curvas referidas a coordenadas polares*

Sean: $AB$ una curva, $M$ uno de sus puntos, $r$ la distancia de $M$ al polo $O$ i $\theta$ el ángulo que hace $OM$ con el eje polar $OX$, la ecuacion de la curva $AB$ será de la forma siguiente




$$F(\theta, r)=0$$

Sea $MT$ la tanjente a la curva en $M$, la costumbre es de determinar el ángulo $V$ que hace esta tanjente con el radio vector $OM$. Para obtener $V$ se considera un punto $M'$ infinitamente próximo de $M$ i se traza la perpendicular $MP$ de $M$ sobre $OM'$; el ángulo en $M'$ del triángulo $PM'M$ tiene por límite $V$ de manera que se puede escribir

$$tj\ V = \lim\ tj\ M' = \lim \frac{PM}{PM'}$$

Para obtener este límite de infinitamente pequeños, se pueden despreciar los infinitamente pequeños de órden superior á los que se conservan. Sea, por ejemplo, $d\theta$ el incremento de $\theta$, se podrá tomar $dr$ para el incremento correspondiente de $r$, en seguida se escribirá

$$PM = r \text{ sen } d\theta = r d\theta$$

$$PM' = r + dr - \cos d\theta = dr$$

Luego

$$tj\ V = \frac{r d\theta}{dr}$$

La razon $\frac{d\theta}{dr}$ se deducirá de la ecuacion de la curva segun las reglas conocidas.

Ejemplo: Sea la curva

$$r = a\ e^{n\theta}$$

Se tendrá

$$dr = a\ n\ e^{n\theta} = n\ r\ d\theta$$

I

$$tg\ V = \frac{r d\theta}{n r d\theta} = \frac{1}{n}$$

El ángulo $V$ es constante.

*Sub-normal i sub-tanjente en coordenadas polares*

Sea $MC$ la normal a la curva en $M$ i $OC$ perpendicular a $OM$; la lonjitud $OC$ es, por definicion, la sub-normal en $M$. Su valor se deduce luego del triángulo $MOC$ en el cual se tiene

$$OC = \frac{r}{tg\ V} = \frac{dr}{d\theta}$$

Sea tambien $E$ el punto de encuentro de la tanjente $MT$ con la recta $CO$ se dice que $OE$ es la subtanjente. Se tiene tambien, en el triángulo $MOE$

$$OE = r\, tg\, V = \frac{r^2\, d\theta}{dr}$$

SOLUCIONES JEOMÉTRICAS

**27.** — Varios problemas sobre determinacion de las tanjentes se pueden resolver jeométricamente, aplicando siempre los principios del cálculo de los infinitamente pequeños. Estas soluciones jeométricas se deducen de las proposiciones siguientes:

1.ª Proposicion. — *Para determinar la direccion de una tanjente a una curva o bien la direccion límite de una recta que pasa por dos puntos infinitamente pró imos como $M$ i $M'$; se puede reemplazar uno de los puntos, $M'$ por ejemplo por otro $M''$ con la condicion que $M'\, M''$ sea infinitamente pequeño de órden superior a $MM'$.*

Para demostrar esta proposicion basta demostrar que el ángulo $M'\, M\, M''$ tiende hácia cero.

Sea, en el triángulo $M'\, M\, M''$, $\epsilon$ el angulo en $M$ i $\alpha$ el ángulo en $M''$ se tiene

$$\frac{\text{sen } \epsilon}{M'\, M''} = \frac{\text{sen } \alpha}{M\, M'}$$

O bien

$$\text{sen } \epsilon = \frac{M'\, M''}{M\, M'} \text{ sen } \alpha$$

*(Continuará)*

ALBERTO OBRECHT
Director del Observatorio Astronómico
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial e integral de la Universidad